DÉPOT
ANNEXE

Les Opérations des Sociétés de Capitalisation

8° 1085

BIBLIOTHEQUE DE SCIENCES PO
1739216

8°
1085

53.346

Thèse soutenue le 1er décembre 1913 pour l'obtention du titre de membre agrégé par M. A. Desvaux, chargé des fonctions de chef de section au Contrôle central des Assurances sur la Vie.

8° 1085

LES OPÉRATIONS

DES

SOCIÉTÉS DE CAPITALISATION

PRÉFACE

Le présent travail a pour but l'étude actuarielle et juridique des sociétés de capitalisation. L'étude actuarielle précède l'étude juridique, car il est naturel d'étudier le fonctionnement technique des opérations de ces sociétés avant de rechercher les règles juridiques qui doivent précisément leur être imposées pour les obliger à fonctionner en conformité des règles techniques de la science actuarielle.

La législation des sociétés de capitalisation est toute récente ; elle date seulement de 1907, tandis que les premières sociétés datent de 1883. Les différentes opérations de capitalisation sont donc, à l'heure actuelle, connues, tandis que la législation qui leur est consacrée est encore peu précise et incomplète sur certains points, et c'est par l'étude préalable et complète des opérations de ces sociétés que l'on doit commencer pour arriver ensuite à l'étude des règlements qui doivent présider à leur fonctionnement.

Les opérations de constitution ou reconstitution de capitaux pratiquées jusqu'ici par les sociétés de capitalisation se classent en deux groupes : 1° Opérations dans lesquelles les remboursements anticipés, non garantis, sont effectués au moyen des bénéfices sociaux et sont, par suite, subordonnés à l'existence de ces bénéfices ; 2° Opérations dans lesquelles les remboursements anticipés sont garantis.

53.346
8°
1085

Etats-Unis d'Amérique. — *Assurance sociale.* — Si les Etats-Unis, comme tous les pays jeunes, ne se sont préoccupés que récemment de l'assurance sociale, ils l'ont fait, du moins, avec autant de zèle que de hardiesse. La grande Compagnie d'assurances de New-York « Metropolitan Life Insurance Company » a donné l'exemple, et elle en a fourni de brillants témoignages dans les travaux que vient de publier l'un de ses plus distingués chefs de service, M. Louis I. Dublin, soit seul (1), soit en collaboration avec un autre et non moins éminent fonctionnaire de la même entreprise, M. Edwin-W. Kopp (2). C'est un modèle à suivre pour les œuvres d'assurance privée, dont le prestige grandit par l'intérêt qu'elles portent et les services qu'elles rendent à la santé publique.

Maurice Bellom.

FONDATION NATIONALE DES SCIENCES POLITIQUES
BIBLIOTHÈQUE
8° 108

(1) *The full-time officer and rural hygiene : Possibilities of reducing mortality at the higher age groups.*

(2) *An experiment in the compilations of mortality statistics.*

Les problèmes auxquels donnent lieu les premières opérations ne diffèrent pas de ceux traités dans les cours d'opérations financières dans la théorie des intérêts composés. La première partie du présent travail est consacrée à l'étude rapide de ces problèmes, et principalement à l'important problème de la répartition des bénéfices entre les divers groupes de contrats d'une société et de la répartition dans les groupes, des bénéfices revenant à chacun des contrats du groupe. Cette partie contient l'exposé d'une méthode de groupement des contrats par séries d'âge et de répartition des bénéfices entre les séries qui, à notre connaissance, n'a pas encore été pratiquée par les sociétés. Elle réaliserait cependant une répartition sensiblement équitable des différents bénéfices.

Les opérations de capitalisation à tirages garantis, étudiées dans la 2[e] partie, chapitres I, II, III et IV, ne diffèrent au fond des opérations viagères que par la substitution à la probabilité viagère d'une probabilité déterminée choisie arbitrairement.

L'opération à tirages garantis réalisée par les sociétés en conformité de la loi de 1907 ne diffère pas de l'assurance mixte. Les différents problèmes qu'elle pose se résolvent par des formules qui ne sont au fond que celles de l'assurance mixte. Mais certaines différences avec les opérations viagères doivent cependant être signalées. Tandis que les décès dans les opérations viagères ont lieu à des dates incertaines et que les formules des primes et des réserves de l'assurance mixte supposent les décès en milieu de période, et par suite, donnent des résultats approchés, les décès des titres de capitalisation ont lieu à dates fixes et la proportion des décès par rapport aux titres existant à l'époque des tirages est parfaitement déterminée. Les calculs des primes et des réserves des contrats de capitalisation peuvent donc être effectués au moyen de formules exactes.

Tandis que la mortalité dans les opérations viagères peut être exprimée par des lois approchées et continues, la mortalité des titres de capitalisation est essentiellement discontinue et exprimée par des lois exactes. Ces lois sont, du reste, déterminées d'avance par l'actuaire.

Le chapitre I étudie l'application aux opérations de capitalisation des deux lois de mortalité pratiques : la loi de l'exponentielle ou du taux de mortalité constant, la loi de Moivre ou des décès constants, dans le cas où les tirages d'amortissements ont lieu en milieu de période.

Nous avons montré que les différents problèmes peuvent se résoudre, en partant de la formule de l'assurance mixte, à l'aide du calcul des annuités viagères et des capitaux différés. Nous avons indiqué que le nombre des décès à chaque tirage est généralement un

nombre fractionnaire et que l'amortissement devant donner nécessairement un nombre entier de titres, il faut reporter les restes successifs des tirages aux tirages suivants et amortir les titres entiers provenant du report des restes.

Nous avons marqué que la prime du contrat de capitalisation devait varier suivant la date de souscription des contrats, la prime à payer immédiatement avant un tirage étant évidemment plus élevée que celle qu'on paierait si l'on souscrivait trois mois avant ce tirage.

La méthode de tirage exposée dans les chapitres I, II, III et IV est celle que l'on désigne sous le nom de méthode de tirage sur les titres en cours. Les titres donnant lieu à remboursement, seuls participent aux tirages. Au contraire, dans la méthode dite « des titres émis », qui fait l'objet d'un chapitre spécial, le chapitre V, tous les titres émis ou créés à l'origine, souscrits ou non souscrits, résiliés ou en vigueur, participent aux tirages. Les titres en vigueur seuls sont payés par la Société de capitalisation. Il en résulte que la mortalité des titres, autrement dit la proportion des titres à amortir à chaque tirage, rapportée aux titres en vigueur au moment de ce tirage est variable. La mortalité peut même être défavorable à la société. Tandis que par l'emploi de la méthode des titres en cours, les sociétés paient rigoureusement à chaque tirage le nombre de contrats prévu par la loi de mortalité employée, le sort n'intervenant que pour répartir les contrats entre les différents souscripteurs dans la méthode des « titres émis », le nombre des titres à amortir peut dépasser la proportion prévue par la loi de mortalité. La méthode des titres émis peut donc donner lieu à une augmentation éventuelle du risque, et il est nécessaire de prévoir un chargement spécial de la prime pure destiné à couvrir cette augmentation : c'est le chargement de risque. Une méthode de calcul du chargement de risque et de la réserve de risque a été exposée.

Dans les chapitres suivants ont été traités différents problèmes relatifs aux contrats pour lesquels la durée de paiement des primes est différente de la durée de la capitalisation, aux contrats pour lesquels les remboursements sont variables, aux contrats pour lesquels il y aurait plusieurs tirages par mois, aux contrats dénommés titres-obligations, dans lesquels les primes portent intérêt.

Dans l'étude juridique qui termine ce travail, nous nous sommes tout d'abord attachés à définir nettement les opérations de capitalisation visées par la loi du 19 décembre 1907, à montrer la différence entre les opérations de capitalisation et les émissions d'obligations, différence qu'il est quelquefois assez difficile d'établir tant il y a de formes variées de bons de capitalisation et d'obligations diverses. Nous avons cherché à définir le contrat de capitalisation en nous appuyant sur les arrêts de la Cour de Cassation, et nous avons

reconnu l'analogie qu'il y a entre ce contrat et le contrat d'assurance sur la vie.

Nous avons enfin énuméré les différentes garanties apportées par la loi du 19 décembre 1907 en ce qui concerne les contrats, le capital social ou le fonds de premier établissement des sociétés de capitalisation, la constitution des réserves mathématiques et de la réserve de garantie, l'institution d'un privilège en faveur des contractants sur l'actif des entreprises, le placement de cet actif, la détermination du maximum des dépenses de premier établissement et du délai d'amortissement de ces dépenses.

L'étude juridique se termine par un examen du fonctionnement des entreprises de gestion de sociétés mutuelles, par l'étude de l'établissement du compte-courant qui doit exister entre ces deux catégories d'entreprises.

ÉTUDE ACTUARIELLE

PREMIÈRE PARTIE

OPÉRATIONS DE CAPITALISATION DANS LESQUELLES LES REMBOURSEMENTS DE CONTRATS SONT EFFECTUÉS SUR LES BÉNÉFICES

Un grand nombre de sociétés ne pratiquent pas les opérations avec remboursements anticipés garantis ; elles se contentent de garantir le remboursement des contrats en fin de période pour la somme fixée dans les polices, mais chaque année, elles consacrent 70 °/₀, ou toute autre proportion des bénéfices, à l'amortissement anticipé. Dans l'exercice qui suit l'attribution des bénéfices, elles distribuent lesdits bénéfices en amortissements anticipés, en un ou plusieurs tirages.

Quelques-unes amortissent par anticipation sur les bénéfices supputés de l'exercice.

Les formules donnant la prime unique pure Π et la prime annuelle pure ϖ de la combinaison de durée n, pour le capital 1 sont :

$$\Pi = (1 + i)^{-n}$$

$$\varpi = \frac{i}{(1 + i)\left[(1+i)^n - 1\right]}$$

(i étant le taux annuel d'intérêt)

La prime mensuelle pure p_m se déduirait de la prime annuelle pure par la formule

$$p_m = \varpi \times \frac{(1 + i)\left[(1 + i)^{\frac{1}{12}} - 1\right]}{i \times (1 + i)^{\frac{1}{12}}}$$

Les réserves V_k, après la k^e année, sont données par les formules suivantes (pour les contrats à primes annuelles ou à prime unique) :

$$V_k = \frac{1 - (1 + i)^k}{1 - (1 + i)^n} \qquad V_k = (1 + i)^{-(n-k)}$$

On peut les calculer par les formules de récurrence :

$$S_{k+1} = (S_k + \varpi)(1 + i) \qquad S_{k+1} = S_k \times (1 + i)$$

Conformément aux décrets réglementant les sociétés de capitalisation, le taux i ne peut dépasser 0,035.

Les primes brutes sont chargées d'au moins 10 °/₀ de leur valeur.

Les bénéfices donnés par les sociétés de capitalisation sont des bénéfices de gestion, des bénéfices de placement et des bénéfices sur résiliations ou rachats de contrats.

Les bénéfices de gestion proviennent des économies faites par la société sur les chargements de gestion contenus dans les primes. Ces bénéfices sont généralement faibles au début, à cause du petit nombre de contrats en cours et de la somme des frais généraux d'une société donnée qui ne peut descendre au-dessous d'un certain minimum.

On peut comprendre dans les frais de gestion les frais d'encaissement, les paiements pour commissions aux agents et inspecteurs. On pourrait évidemment, comme en assurance sur la vie, distinguer les chargements pour encaissements des primes, les chargements d'acquisition, les chargements de gestion proprement dite, et distinguer les frais correspondants : frais généraux, frais d'encaissement, commissions aux agents et inspecteurs. Il est plus simple de considérer le chargement global des primes donnant le montant total des sommes à la disposition de la société pour payer ses frais généraux. Etant donné le nombre des contrats en cours dans un exercice donné et la valeur des capitaux assurés, en tenant compte du nombre des primes mensuelles payées sur chaque contrat, on peut déterminer rapidement le montant des chargements de gestion à la disposition d'une société dans cet exercice. Les frais généraux payés et les commissions étant évalués en fin d'année, on obtient par différence le bénéfice de gestion.

Comment répartir les bénéfices de gestion entre les différentes catégories de contrats en cours? La solution est évidente : proportionnellement aux chargements de gestion de chaque catégorie, qui sont déterminés d'avance.

Chaque contrat donne, lors du paiement de chaque prime mensuelle ou annuelle, sa contribution aux frais de gestion. Pour les contrats qui ont plus d'un an de cours, le chargement est connu d'avance pour l'exercice ; chaque contrat d'une même catégorie à prime unique ou annuelle donne une égale contribution à la gestion (le contrat de 1.000 francs de capital est pris comme unité).

Le bénéfice de placement provient de la différence entre le taux de placement effectif des réserves mathématiques et le taux prévu pour leur calcul. Il est faible également aux débuts d'une société, puisque les réserves des contrats sont faibles ; il ne peut devenir important que lorsque la société possède de nombreux contrats ayant une durée élevée. Dans un exercice donné, la réserve d'un

contrat placée au début de l'exercice et la prime encaissée sur ce contrat portent intérêt jusqu'à la fin de l'exercice. L'intérêt produit par la prime, qui en moyenne est encaissée au milieu de l'exercice, est faible ; en le négligeant, on peut dire que le bénéfice de placement est sensiblement proportionnel à la réserve de chaque contrat au début de l'exercice.

Le bénéfice de placement, qui est la différence entre la somme des intérêts touchés dans un exercice donné et la somme des intérêts nécessaires à la capitalisation des réserves et des primes encaissées dans l'exercice, devra donc être réparti entre les catégories de contrats proportionnellement à la somme des réserves de ces catégories.

Les bénéfices sur résiliation ou rachat de contrats se déterminent immédiatement par la différence entre la réserve mathématique du contrat évaluée à l'époque du rachat ou de la résiliation, et la somme payée au porteur du contrat racheté ou résilié. On connaît pour chaque catégorie de contrats les bénéfices de rachat ou de résiliation d'un exercice donné.

Les bénéfices de gestion, de placement ou de résiliation peuvent donc être répartis entre les différentes catégories de contrats. On peut même les répartir dans une catégorie donnée entre les titres des différents âges par les mêmes principes qui ont servi pour la répartition entre les catégories. (Pour répartir les titres par âge, on peut considérer comme de même âge les titres souscrits entre le 1^er^ juillet d'une année et le 30 juin de l'année suivante). Les titres se trouvent ainsi rangés par séries d'âge dans chaque catégorie. Le calcul des réserves mathématiques en fin d'année peut être fait pour chaque série ; de même, le calcul des chargements de gestion donnés pour chaque série et l'attribution des bénéfices à chaque série peut être faite assez rapidement. On peut supposer, avec une approximation suffisante pour la répartition des bénéfices, que les contrats d'une même série ont même réserve mathématique à la fin d'un exercice donné. On pourra procéder dans chaque série à l'amortissement par anticipation des titres ; on tirera au sort les titres à amortir.

Pour déterminer le nombre de titres à amortir dans chaque série, on procédera de la manière suivante : Soit b le chiffre des bénéfices à répartir dans la série ; R, la réserve moyenne de chacun des contrats de la série au 31 décembre de l'exercice où sont attribués les bénéfices ; C, le capital que l'on rembourse à chaque contrat ; la somme à amortir n'est en réalité que de C — R, puisqu'après amortissement, la réserve des contrats amortis deviendra disponible. Le nombre de titres à amortir avec une somme b de bénéfices est donc en réalité de $\frac{b}{C - R}$ dans la série. Le quotient $\frac{b}{C - R}$ donnera

un entier et une fraction. On amortira un nombre entier de titres et on reportera la fraction au tirage suivant de la série considérée.

La désignation des titres à amortir dans la série peut être effectuée au moyen de roues contenant les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. On prend autant de roues que le nombre de contrats contenus dans la série a de chiffres. Si des numéros de contrats non souscrits ou n'ayant pas droit aux tirages venaient à sortir, le tirage serait recommencé jusqu'à ce que le nombre de contrats déterminé et ayant droit aux tirages fût sorti.

On pourrait aussi se servir d'une roue à étuis contenant tous les numéros souscrits dans la série. Cette roue pourrait d'ailleurs servir pour tous les tirages ultérieurs à effectuer sur la série.

On pourrait aussi se servir d'une seule roue pour le tirage dans toutes les séries, celles-ci étant numérotées à partir du numéro 1 et étant distinguées entre elles par les millésimes des années d'entrée. On aurait ainsi le contrat n° 1 de la série 1912-1913 (série constituée par les titres souscrits dans le deuxième semestre de 1912 et le premier semestre de 1913). Les numéros tirés pourraient, quand cela serait possible, être amortis dans toutes les séries. Il faudrait mettre dans la roue un nombre de numéros correspondant au plus grand nombre de contrats contenus dans les séries participant aux tirages.

On remarquera donc que les différentes séries d'une même catégorie de contrats se verront attribuer le même bénéfice de gestion pour chacun de leurs contrats. On leur attribuera une part des bénéfices de placement proportionnelle à la réserve de chacun des contrats de la série. Par conséquent, les séries âgées auront une proportion plus élevée du bénéfice de placement.

Les contrats à prime unique participeront à la répartition des bénéfices de gestion pour la même proportion que les contrats à prime annuelle ; mais ils participeront pour une proportion plus forte dans le partage du bénéfice de placement, car leur réserve est plus élevée que celle des contrats à prime annuelle. Mais pour l'amortissement par tirage au sort, le contrat à prime unique sorti au tirage devrait être remboursé en toute équité par le paiement d'une somme $C + R_1 - R$; R_1 : réserve au 31 décembre de l'exercice du contrat à prime unique, R : réserve à la même date du contrat à prime annuelle de même âge. Il serait ainsi placé dans les mêmes conditions qu'un titre souscrit à primes annuelles, puisque l'excédent de réserve qu'il aurait constitué lui serait remboursé (1).

(1) La valeur escomptée des primes annuelles, évaluée au début du contrat en tenant compte de la probabilité de sortie au tirage (probabilité variable et inconnue *a priori*), serait évidemment inférieure à la prime unique du contrat. Dans les sociétés de capitalisation pratiquant les tirages sur les bénéfices, les contrats à prime unique sont donc désavantagés.

On peut prendre comme exemple de contrat le contrat de 15 ans à primes mensuelles de 5 francs remboursable à 1.000 francs.

Le taux des tarifs à adopter est celui de 3 1/2 °/₀. La prime annuelle pure est $\frac{1.000}{19,971029} = 50,0725$.

La prime unique pure est 596,89.

La prime mensuelle se calcule par la formule :

$$p_m = 50,0725 \times \frac{1,035\left[1,035^{\frac{1}{12}} - 1\right]}{0,035\,(1,035)^{\frac{1}{12}}}$$

$$p_m = \frac{50,0725}{11,8165} = 4,2375$$

La prime mensuelle brute étant fixée à 5 francs, le chargement de cette prime ressort à $\frac{0,7625}{5} = 15,25$ °/₀.

La prime brute annuelle équivalente serait de :

$$11,8165 \times 5 = 59,0825 \text{ ou } 59 \text{ fr. } 10.$$

La prime unique brute équivalente serait de :

$$\frac{596,8906}{0,8475} = 704 \text{ fr. } 30.$$

On voit que chaque prime annuelle donne un chargement annuel de gestion de 9 fr. 03, ou 0 fr. 752 par mois.

Les réserves successives des contrats à primes annuelles sont les suivantes :

$V_1 = 51,82$	$V_8 = 469,10$
$V_2 = 105,46$	$V_9 = 537,34$
$V_3 = 160,98$	$V_{10} = 607,98$
$V_4 = 218,43$	$V_{11} = 681,08$
$V_5 = 277,90$	$V_{12} = 756,74$
$V_6 = 339,46$	$V_{13} = 835,05$
$V_7 = 403,16$	$V_{14} = 916,11$

Les réserves successives des contrats à prime unique seraient :

$V_1 = 617,78$	$V_9 = 813,50$
$V_2 = 639,40$	$V_{10} = 841,97$
$V_3 = 661,78$	$V_{11} = 871,44$
$V_4 = 684,94$	$V_{12} = 901,94$
$V_5 = 708,91$	$V_{13} = 933,51$
$V_6 = 733,73$	$V_{14} = 966,18$
$V_7 = 759,41$	$V_{15} = 1000$ »
$V_8 = 785,99$	

Pour évaluer les réserves des contrats, on peut ranger les contrats par séries d'âge : les contrats entrés dans le premier semestre d'une année sont supposés entrés le premier janvier de cette année ; ils ont pour réserve la réserve d'un contrat ayant un an de cours ; les contrats entrés dans le deuxième semestre sont supposés entrés le 31 décembre ; ils ont pour réserve la somme des primes annuelles ou mensuelles versées sur chaque contrat, en supposant qu'ils soient souscrits au 31 décembre.

Pour calculer les valeurs de réduction on peut employer la méthode de réduction proportionnelle : le contrat qui aura n années d'existence touchera à la fin de la quinzième année un capital égal à $1000 \times \frac{n}{15}$.

Ce calcul donne à la société une indemnité de réduction. On peut calculer les valeurs de rachat en escomptant les valeurs de réduction au taux de 4 % pour le temps restant à courir pour le contrat jusqu'à l'expiration des 15 ans. Cette méthode donne également une indemnité de rachat à la société de capitalisation.

Il faut, bien entendu, tenir compte dans l'évaluation de ces indemnités des frais d'acquisition non amortis. Dans le cas du contrat de 15 ans sans amortissement garanti, on peut supposer ces frais amortis par parties égales en 15 années.

Il faut également tenir compte de ces frais dans le tirage au sort sur les bénéfices. En effet, pour évaluer le nombre de titres à amortir, il faut tenir compte de la valeur des frais d'acquisition restant à amortir pour les titres appartenant à une série donnée d'un âge déterminé. Si a représente la valeur des commissions restant à amortir, le calcul du nombre des titres à amortir dans chaque série est donné par le quotient $\frac{b}{C - R + a}$.

Dans le cas d'une série d'âge 5, en supposant la commission d'acquisition de 30 fr. amortissable par quinzièmes, on a : $a = 20$, $C - R = 1000 - 277,90$. Le nombre de titres à amortir sera donné par le quotient :

$$\frac{b}{1000 - 277,90 + 20}$$

Les 20 fr. pris sur les bénéfices serviront à amortir, au compte des commissions escomptées, la part afférente aux titres amortis par tirage au sort.

Remarque I. — Etant donné le bénéfice b d'un exercice évalué au 31 décembre de cet exercice, si la société procède dans l'exercice suivant à 4 ou 12 tirages d'amortissement, chaque tirage aura à sa

disposition une somme $\frac{b}{4}$ ou $\frac{b}{12}$ pour l'amortissement. Il faudra alors modifier légèrement la formule qui donne le nombre de titres à amortir à chaque tirage : on prendra le quotient $\frac{b}{4(C - R_1 + a_1)}$ R_1 étant la réserve d'un contrat d'une série donné à l'époque du tirage; a_1, frais d'acquisition à amortir à l'époque du tirage. On pourra calculer les réserves à une époque donné par interpolation entre deux réserves annuelles consécutives.

Pour une société tirant par trimestre ou par mois par anticipation sur les bénéfices supputés d'un exercice, il faudrait également tenir compte de la réserve exacte des contrats à l'époque du tirage.

Remarque II. — La plupart des sociétés ne rangent pas les titres par séries d'âge et n'opèrent pas la répartition séparée des bénéfices de gestion ou de placement entre ces séries. Elles ne tiennent pas non plus compte des réserves des contrats devenus libres ; elles se contentent de diviser le bénéfice par 1000 (valeur du contrat) et elles amortissent indistinctement les titres quel que soit leur âge. Elles font participer aux tirages tous les titres ayant payé un minimum déterminé de primes mensuelles. Il reste ainsi un reliquat de bénéfices qui n'est pas distribué et qui est reporté à un tirage suivant. L'amortissement des titres n'est pas régulier ; les titres jeunes peuvent être favorisés au détriment de plus anciens. La part de bénéfices de placement attribuée aux titres jeunes peut être trop élevée.

Remarque III. — Au bout d'un certain nombre d'années, les bénéfices de gestion, de placement, de résiliation, pour une société qui est arrivée à un développement suffisant, sont à peu près constants. La proportion des titres à amortir est connue (4/1000 environ dans la plus grande société française) et varie peu d'une année à l'autre si la production est à peu près constante,

Dans ces sociétés, il serait du moins possible d'amortir une proportion aussi égale que possible des titres d'âges divers. Il suffirait de faire une répartition des bénéfices entre les différentes séries d'âge proportionnellement au nombre de titres de chaque série. On amortira 4/1000 dans chaque série d'âge moyen.

DEUXIÈME PARTIE

OPÉRATIONS DE CAPITALISATION COMPORTANT DES REMBOURSEMENTS PAR TIRAGES AU SORT GARANTIS

Chapitre I

Opérations de capitalisation comportant un tirage annuel

(*Méthode de tirage sur les titres en cours*)

Le véritable problème des sociétés de capitalisation se pose lorsque l'opération de capitalisation a pour but, non seulement de reconstituer les capitaux promis dans les contrats à la fin de la période de reconstitution, mais encore de rembourser par anticipation une certaine proportion de ces contrats.

On peut imaginer le problème suivant : un contractant s'engage à payer une prime unique au début du contrat, ou n primes annuelles au commencement de chaque année ; la société de capitalisation s'engage, par contre, à payer à ce contractant le capital C, soit au bout de n années, soit par tirages au sort effectués au milieu de chacune des n années du contrat. La proportion d'amortissement des contrats au milieu de chaque année ou le taux de mortalité des contrats est donné d'avance ; il sera q_0 au milieu de la première année, q_1 au milieu de la deuxième, et q_{n-1} au milieu de la n^{me} année.

Le problème ainsi posé est, comme on le voit immédiatement, l'analogue du problème de l'assurance mixte posé dans la théorie des assurances sur la vie, en admettant une loi de mortalité discontinue : les titres de capitalisation sont, en effet, des têtes assurées que l'on fait mourir pendant la période de n années suivant une loi déterminée d'avance et *certaine* ; les têtes survivant à la fin des n années touchent le capital promis en fin de période. Il y a donc bien là l'analogue d'une assurance temporaire en cas de décès jointe à une combinaison analogue à l'assurance de capital différé.

Les formules qui donnent la prime pure unique et la prime pure annuelle de la combinaison envisagée sont donc celles de l'assurance mixte.

On sait que les formules de l'assurance mixte écrites en annuités sont les suivantes :

$$\Pi = C\left[(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - i\, a_0^{(n)} - P_0^n\right) + P_0^n\right] \qquad (1)$$

$$\varpi = C\,\frac{(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - i\, a_0^{(n)} - P_0^n\right) + P_0^n}{1 + a_0^{(n-1)}} \qquad (1)$$

où i est le taux d'intérêt adopté par la société de capitalisation pour ses calculs ; P_0^n le capital différé ; $a_0^{(n)}$, $1 + a_0^{(n-1)}$ les annuités certaines payables pendant la vie des titres, la première est l'annuité temporaire payable en fin d'année, l'autre l'annuité temporaire payable d'avance. L'âge 0 indiqué en indice indique que tous les titres souscrits au début ont l'âge 0, puis au bout d'un an ils ont l'âge 1, etc...

Par analogie avec les $a_x^{(n)}$ et les $1 + a_x^{(n-1)}$, les $a_0^{(n)}$ et les $1 + a_0^{(n-1)}$ sont égaux à :

$$a_0^{(n)} = P_0^1 + P_0^2 + \dots + P_0^{(n)}$$

$$1 + a_0^{(n-1)} = 1 + P_0^1 + P_0^2 \dots + P_0^{(n-1)}$$

Les relations $a_0^{(n)} = a_0^{(n-1)} + P_0^n \qquad P_0^n = p_0^n\,(1+i)^{-n}$ sont immédiates.

$p_0{}^n$ désignant la probabilité pour un titre d'âge 0 de survivre à la fin des n années, on a :

$$p_0^n = p_0\, p_1\, p_2 \,\dots\, p_{n-1} = (1-q_0)\,(1-q_1)\,(1-q_2)\dots(1-q_{n-1})$$

$$P_0^1 = p_0\,(1+i)^{-1} \qquad P_0^2 = p_0\, p_1\,(1+i)^{-2} \qquad P_0^3 = p_0\, p_1\, p_2\,(1+i)^{-3}$$

On voit ainsi que les éléments de Π et ϖ (annuités et capitaux différés) peuvent se calculer ; ils dépendent des taux de mortalité $q_0\ q_1\ q_2 \dots q_{n-1}$ que l'on se donne arbitrairement et d'avance.

Au lieu de se donner les taux de mortalité, on pourrait se donner une loi de mortalité quelconque exprimée par une table de mortalité donnée. On pourrait prendre V_0 vivants au début de la première année, V_1 au début de la 2ème, V_{n-1} au début de la $n$ème, V_n à la fin de la $n$ème.

Les taux de mortalité seraient alors donnés par les relations bien

connues $q_0 = \dfrac{d_0}{V_0},\ q_1 = \dfrac{d_1}{V_1},\ q_2 = \dfrac{d_2}{V_2},\ q_{n-1} = \dfrac{d_{n-1}}{V_{n-1}}$

où $d_0 = V_0 - V_1,\quad d_1 = V_1 - V_2,\quad d_{n-1} = V_{n-1} - V_n$

Mais au lieu de revenir au calcul de Π et de ϖ par les annuités, on peut les calculer par les commutations.

On obtient les formules immédiates :

$$\Pi = C \frac{M_0 - M_n + D_n}{D_n} \qquad (2)$$

$$\varpi = C \frac{M_0 - M_n + D_n}{N_0 - N_n} \qquad (2)$$

Les indices correspondant à l'âge des titres, âge 0 au début de la période des n années, âge n à la fin des n années.

Les commutations sont donc calculées par les formules

$$D_0 = V_0 (1 + i)^{-0} = V_0 \qquad D_1 = V_1 (1 + i)^{-1} \qquad D_2 = V_2 (1 + i)^{-2}$$
$$D_n = V_n (1 + i)^{-n}$$

$$N_0 = D_0 + D_1 + D_2 + \dots + D_n + \dots$$
$$N_n = D_n + D_{n+1} + \dots$$
$$N_0 - N_n = D_0 + D_1 + D_2 \dots + D_{n-1}$$

$$C_0 = d_0 (1 + i)^{-\frac{1}{2}} \qquad C_1 = d_1 (1 + i)^{-\frac{1}{2}-1} \qquad C_2 = d_2 (1 + i)^{-\frac{1}{2}-2}$$

$$M_0 = C_0 + C_1 + C_2 \dots$$
$$M_n = C_n + C_{n+1} + \dots$$
$$M_0 - M_n = C_0 + C_1 + C_2 \dots + C_{n-1}$$

Le problème proposé est donc résolu par les méthodes des annuités et des commutations. On obtient des formules qui sont anologues à celles de l'assurance mixte, mais les annuités et les commutations dépendent de probabilités déterminées à l'avance et parfaitement connues.

Il est à remarquer que dans les formules, il n'y a pas d'âge différent pour les titres au début ; tous ont l'âge 0 au début, c'est pourquoi les indices x, $x + n$ des notations de l'assurance sont remplacés par 0 et n.

Une différence encore avec les opérations d'assurances sur la vie s'aperçoit immédiatement : c'est que, dans celles-ci, le nombre des décès observé est toujours un nombre entier, tandis que la mortalité créée pour les Sociétés de capitalisation ne donnera en général jamais un nombre entier de titres à amortir chaque année. Pour que la loi de mortalité adoptée donnât des nombres entiers, il faudrait que le nombre de titres N_0 souscrits dans le premier semestre, la première année, fût un multiple du nombre V_0 de survivants adopté pour premier nombre de la table de mortalité, et que les nombres successifs N_1, N_2 des titres restant en vigueur au début de chaque année fussent également des multiples des nombres de vivants V_1, V_2, V_3 de la table. Or, cette condition ne sera jamais remplie, en général.

Le nombre de titres à amortir la première année sera $q_0\, N_0$. On ne pourra amortir évidemment que le plus grand entier contenu

dans q_0 N_0 ; le reste sera reporté au tirage suivant, et si, en l'ajoutant au reste donné par le deuxième tirage, on obtient l'unité, on pourra amortir un titre en plus à ce deuxième tirage. On pourra reporter ainsi les restes de proche en proche.

Comment opérer les tirages ? L'année sociale commençant avec l'année du calendrier, il faudra tirer le 1er juillet sur les titres en cours à cette époque. Si nous appelons N_0 le nombre de titres souscrits dans le premier semestre et en vigueur le 1er juillet, on amortira q_0 N_0 titres ; il en restera en vigueur N_0 $(1 - q_0)$ ou le nombre entier immédiatement supérieur, qui formeront une série de titres d'âge 0 au 1er juillet du premier exercice. Cette série aura l'âge 1 au 1er juillet de l'exercice suivant. Un nouveau tirage sera effectué sur cette série ; le taux sera q_1. S'il n'y a pas eu de titres résiliés ou rachetés dans l'intervalle, le nombre des titres restant en vigueur après le deuxième tirage sera

$$N_0 (1 - q_0) (1 - q_1)$$

Les titres seront donc rangés en séries qui se distingueront par l'âge. Pour un tarif donné, de durée n, il y aura donc, au bout de n années de durée de la Société, n séries de titres en cours.

Il est à remarquer que les formules établies plus haut s'appliquent à des titres qui ont six mois de cours au moment du premier tirage. Pour des titres participant au tirage aussitôt après la sous cription, il faudrait adopter les formules suivantes :

$$\Pi = C \left[1 - i\, a_0^{(n)}\right] \qquad (3)$$

$$\varpi = C \, \frac{1 - i\, a_0^{(n)}}{1 + a_0^{(n-1)}} \qquad (3)$$

Les titres souscrits dès le 1er juillet du premier exercice social et qui ne participeront que dans une année, au 1er juillet suivant, aux tirages, devraient être calculés par les formules suivantes :

$$\Pi = C \left[(1 - i\, a_0^{(n)} - P_0^{(n)}) (1 + i)^{-1} + P_0^{n}\right] \qquad (4)$$

$$\varpi = C \, \frac{(1 - i\, a_0^{(n)} - P_0^{n}) (1 + i)^{-1} + P_0^{n}}{1 + a_0^{(n-1)}} \qquad (4)$$

Les tirages ayant lieu à époque fixe dans les Sociétés de capitalisation, les primes devraient varier avec l'époque de la souscription des contrats. Il faudrait adopter les primes de la formule (3) pour les contrats souscrits immédiatement avant le tirage, les primes de la formule (4) pour les contrats souscrits un an avant le tirage, les primes de la formule (1) pour ceux souscrits six mois avant le tirage.

La différence entre les primes de (3) et de (4) est

$$\frac{1 - i\, a_0{}^n - P_0{}^n}{1 + a_0{}^{(n-1)}} \times \frac{i}{1+i}$$

dans le cas de la prime annuelle.

Cette différence est égale à la prime d'assurance temporaire multipliée par $\frac{0{,}035}{1{,}035}$, c'est-à-dire à environ 3,5 °/₀ de cette prime.

Si la prime annuelle d'assurance temporaire est de 3 francs pour un contrat de 1.000 francs, on voit que la différence entre les primes de (3) et (4) est de 10 centimes environ. En adoptant pour tous ces contrats la prime résultant de la formule (1), on commettra donc une erreur de 5 centimes en plus ou en moins sur les contrats ayant plus de six mois ou moins de six mois de cours au moment du premier tirage.

Dans le cas des primes payables annuellement, la Société pourra donc adopter la prime la plus élevée, ce qui peut majorer les primes les plus faibles de 10 centimes.

Dans le cas des primes mensuelles, les erreurs commises sur les primes pures sont négligeables, il n'y aura pas lieu de majorer les primes brutes. Dans le cas des primes uniques pures, les erreurs commises pourraient être plus élevées, les Sociétés pourraient calculer les primes pures dans le cas des formules 1, 3 et 4 et obtenir par interpolation des primes pures exactes pour les différentes durées à courir. Elles majoreraient les primes à payer par les souscripteurs des sommes suffisantes.

Cas du taux de mortalité constant. — Pour simplifier les formules (1), on peut supposer les taux de mortalité annuels égaux entre eux (on amortira chaque année la même proportion des titres en cours).

On aura alors :

$$q_0 = q_1 = q_2 \; \dots \; \dots = q_{n-1} = q$$

$$p_0 - p_1 = p_2 \qquad\qquad = p_{n-1} = p$$

$$p_0{}^n = p^n \qquad\qquad p_0{}^2 = p^2 \; \dots \; \dots \; \dots$$

Par suite :

$$a_0{}^{(n)} = p\,(1+i)^{-1} + p^2\,(1+i)^{-2} + \dots \; \dots + p^n\,(1+i)^{-n}$$

$$1 + a_0{}^{(n-1)} = 1 + p(1+i)^{-1} + p^2\,(1+i)^{-2} + \dots \; .. \; + p^{n-1}\,(1+i)^{-(n-1)}$$

$$P_0{}^n = p_0{}^n\,(1+i)^{-n}$$

On a donc

$$a_0^{(n)} = p\,(1+i)^{-1} \times \frac{p^n\,(1+i)^{-n} - 1}{p\,(1+i)^{-1} - 1}$$

$$1 + a_0^{(n-1)} = \frac{p_n\,(1+i)^{-n} - 1}{p\,(1+i)^{-1} - 1}$$

On trouve pour la formule (1) donnant la prime annuelle :

$$\varpi = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}} + p^n (1+i)^{-n} \frac{p\,(1+i)^{-1} - 1}{p^n (1+i)^{-n} - 1}$$

En posant $v = p\,(1+i)^{-1}$, on obtient les formules plus simples :

$$P_0^{\,n} = v^n$$

$$a_0^{\,n} = v\,\frac{v^n - 1}{v - 1} \qquad 1 + a_0^{(n-1)} = \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

$$\varpi = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}} + v^n\,\frac{v - 1}{v^n - 1}$$

$$\Pi = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}}\,(1 + a_0^{(n-1)}) + p^n\,(1+i)^{-n}$$

$$\Pi = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{v^n - 1}{v - 1} + v^n$$

Pour établir les commutations dans le cas du problème actuel, on peut prendre une table de mortalité ayant comme nombre de vivants

$$V_0 = V_0, \quad V_1 = pV_0, \quad V_2 = p^2\,V_0 \;\ldots\;\ldots\; V_{n-1} = p^{n-1}V_0$$

Les calculs des D_0 D_1 D_n, N_0 N_1 N_n, C_0 C_1 C_n, M_0 M_1 M_n sont alors immédiats.

Le nombre des vivants obéit donc à la loi $V_x = p^x\,V_0$.

On peut établir par une autre méthode très rapide les formules donnant Π et ϖ.

Π exprime l'engagement de l'assureur d'amortir les titres, soit par anticipation, soin en fin de période. La probabilité qu'un titre vive dans n années étant p^n, qu'il meure dans n années après avoir vécu jusque là étant qp^n, on a pour Π la valeur suivante : $(C = 1)$.

$$\Pi = \sum_{n=0}^{n-1} qp^n\,(1+i)^{-n-\frac{1}{2}} + p^n\,(1+i)^{-n}$$

ou $$\Pi = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}} \sum_{0}^{n-1} p^n\,(1+i)^{-n} + p^n\,(1+i)^{-n}$$

$$\Pi = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}}\,(1+a_0{}^{n-1}) + p^n\,(1+i)^{-n}$$

Par suite $$\varpi = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}} + \frac{p^n\,(1+i)^{-n}}{1+a_0{}^{(n-1)}}$$

Calcul des réserves. — Les réserves se calculeront par des formules analogues à celles qui servent en assurance sur la vie au calcul des réserves des assurances mixtes.

Si l'on désigne par $\Pi_0\ \varpi_0$ les primes du contrat de durée n, Π_1, la prime de durée $n-1$, Π_2 la prime de la durée $n-2$ etc, la réserve du contrat à la fin de la première année sera

$$V_1 = \Pi_1 - \varpi_0\,(1+a_1^{(n-2)})$$

De même $$V_2 = \Pi_2 - \varpi_0\,(1+a_2^{(n-3)})$$

on a $$a_1^{(n-2)} = P_1^1 + P_1^2 + \;.\;.\;.\; + P_1^{(n-2)}$$

les $P_1^1\ P_1^2$ étant égaux à $p_1\,(1-i)^{-1}$ $\quad p_1\,p_2\,(1+i)^{-2}$

$$P_1^{(n-2)} = p_1\,p_2\;.\;.\;.\;p_{n-2}\,(1+i)^{-(n-2)}$$

Dans le cas où les probabilités de décès annuelles sont constantes, les formules se simplifient ; l'assurance temporaire en cas de décès a une réserve nulle puisque la prime correspondante est constante. Il suffit de calculer la réserve du capital différé qui s'obtient comme on sait par la capitalisation viagère de la prime pure du capital différé.

La réserve au bout de k années est donnée par la formule $p \times \dfrac{1+a_x^{(k-1)}}{P_x^k}$ ou par $\dfrac{p_x^n}{p_x^k}$. On a le quotient de deux primes de capital différé, l'une pour la durée n, l'autre pour la durée k.

En appliquant à la prime du capital différé comprise dans la prime de capitalisation qui est

$$\frac{p^n(1+i)^{-n}}{1+a_0^{(n-1)}},\ \text{ou en posant } v = p\,(1+i)^{-1},\ \frac{v^n(v-1)}{v^n-1}$$

la prime du capital différé de durée k serait : $\dfrac{v^k\,(v-1)}{v^k-1}$

La réserve au bout de k années serait par suite :

$$v^{(n-k)}\,\frac{v^k-1}{v^k-1}\ \text{ ou }\ 1 - \frac{v^{\,(n-k)}-1}{v^n-1}$$

Les réserves successives s'obtiennent donc en faisant successivement $k = 1, 2.....n$.

On a :

$$V_1 = \frac{1}{v^n - 1} \times v^{n-1} (v - 1)$$

$$V_2 = \frac{1}{v_n - 1} \times v^{n-2} (v^n - 1)$$

. . . .

$$V_n = \frac{1}{v_n - 1} v^{n-n} (v^n - 1) = 1$$

L'emploi de la méthode de récurrence donnerait lieu à la formule suivante :

$$S_{k+1} = \frac{(S_k + \varpi)(1+i) - q(1+i)^{\frac{1}{2}}}{p}$$

S_{k+1}, S_k étant les réserves après k et $k+1$ années.

On remarquera que la formule de récurrence, dans le cas du taux de mortalité constant, peut s'écrire sous la formule suivante :

$$S_{k+1} = S_k \times \frac{1+i}{p} + \frac{\varpi(1+i) - q(1+i)^{\frac{1}{2}}}{p}$$

La quantité $\frac{1+i}{p}$ est constante ; on peut la poser égale à A.

La quantité $\frac{\varpi(1+i) - q(1+i)^{\frac{1}{2}}}{p}$ n'est autre que la réserve du contrat considéré à la fin de la première année, c'est-à-dire S_1.

La formule de récurrence donnant la réserve des contrats à prime annuelle se met donc sous la forme remarquable :

$$S_{k+1} = A \times S_k + S_1$$

D'où l'on déduit les formules suivantes :

$$S_2 = S_1 (A + 1)$$

$$S_3 = S_2 (A^2 + A + 1) = S_1 \times \frac{A^3 - 1}{A - 1}$$

$$S_4 = S_1 \times \frac{A^4 - 1}{A - 1}$$

. . . .

$$S_n = S_1 \frac{A^n - 1}{A - 1}$$

Les réserves successives sont des fonctions linéaires de la réserve précédente. Les formules ci-dessus permettent de calculer directement ces réserves. La quantité A est l'inverse de la quantité $p(1+i)^{-1}$ désignée précédemment par v.

Les réserves successives des contrats à prime unique seraient :

$$\Pi_1 = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{v^{n-1}-1}{v-1} + v^{n-1}$$

$$\Pi_2 = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{v^{n-2}-1}{v-1} + v^{n-2}$$

$$\Pi_{n-1} = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{v-1}{v-1} + v$$

Primes payables mensuellement. — Dans le problème proposé plus haut, les primes étaient payables annuellement en début d'année ; ordinairement dans les sociétés de capitalisation les primes sont payables par fractions semestrielles, trimestrielles ou même mensuelles.

Il faut alors évaluer les primes fractionnées en fonctions de la prime annuelle.

La relation entre la prime annuelle et les primes mensuelles s'écrit immédiatement :

$$\varpi_a = \varpi_m \left[\left[1 + (1+i)^{-\frac{1}{2}} + \ldots (1+i)^{-\frac{5}{12}}\right]\right.$$
$$\left. + p\,(1+i)^{-\frac{6}{12}} + p\,(1+i)^{-\frac{7}{12}} \ldots + p\,(1+i)^{-\frac{11}{12}}\right]$$

$$\varpi_a = \varpi_m \left[1 + (1+i)^{-\frac{1}{12}} + \ldots + (1+i)^{-\frac{11}{12}}\right.$$
$$\left. - q\left[(1+i)^{-\frac{6}{12}} + \ldots + (1+i)^{-\frac{11}{12}}\right]\right]$$

$$\frac{\varpi_a}{\varpi_m} = \frac{(1+i)^{-1}-1}{(1+i)^{-\frac{1}{12}}-1} - q\,(1+i)^{-\frac{6}{12}}\,\frac{(1+i)^{-\frac{6}{12}}-1}{(1+i)^{-\frac{1}{12}}-1}$$

(q, taux de mortalité constant).

La relation entre la prime annuelle et les primes payables en k fois par an (k pair, $k = 2, 4, \ldots 12$) est également :

$$\varpi_a = \varpi_k \left[(1+i)^{-\frac{1}{k}} + \ldots (1+i)^{-\frac{k-1}{k}} - q\,(1+i)^{-\frac{k}{2k}} \ldots\right.$$
$$\left. - q\,(1+i)^{-\frac{k-1}{k}}\right]$$

$$\frac{\varpi_a}{\varpi_m} = \frac{(1+i)^{-1}-1}{(1+i)^{-\frac{1}{k}}-1} - q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{(1+i)^{-\frac{1}{2}}-1}{(1+i)^{-\frac{1}{k}}-1}$$

Comparaison entre la capitalisation avec tirages garantis et la capitalisation sans tirages garantis. — Les formules obtenues dans le cas du taux de mortalité constant s'appliquent immédiatement à la capitalisation sans amortissement garanti en faisant dans les formules

$$q = 0 \qquad p = 1$$

La prime unique Π est bien égale à $(1+i)^{-n}$.

La prime annuelle ϖ est égale à

$$\frac{(1+i)^{-n}}{\dfrac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1}} = (1+i)^{-n}\frac{(1+i)^{-1}-1}{(1+i)^{-n}-1}$$

on peut l'écrire :

$$\varpi = \frac{i}{(1+i)\left[(1+i)^{n}-1\right]}$$

Cette dernière formule est immédiate lorsque l'on considère que la prime ϖ placée d'avance doit reproduire le capital 1 au bout de n années, et l'on a, en appliquant la formule des placements annuels bien connue :

$$\varpi\,(1+i)\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i} = 1$$

ϖ se calcule par la formule inverse de la formule des placements.

Les formules des réserves s'obtiennent aussi en faisant $p = 1$ $q = 0$ dans la formule obtenue précédemment.

On aura : $V_k = 1 - \dfrac{v^{(n-k)}-1}{v^{n}-1}$ mais v est égal ici à $(1+i)^{-1}$ au lieu de $p\,(1+i)^{-1}$; les formules restent les mêmes.

$\Pi\ \varpi\ V_k$ désignant les primes et les réserves des contrats de capitalisation avec tirages garantis, $\Pi'\ \varpi'\ V'_k$ désignant les primes et les réserves des contrats sans tirages garantis, on a alors la comparaison suivante :

$$\Pi = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{p^{n}(1+i)^{-n}-1}{p\,(1+i)^{-1}-1} + p^{n}(1+i)^{-n}$$

$$\Pi' = (1+i)^{-n}$$

$$\varpi = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}} + p^{n}(1+i)^{-n} \times \frac{p\,(1+i)^{-1}-1}{p^{n}(1+i)^{-n}-1}$$

$$\varpi' = \frac{i}{(1+i)\left[(1+i)^{-n}-1\right]}$$

$$V_k = 1 - \frac{v^{n-k}-1}{v^{n}-1} \qquad V'_k = 1 - \frac{(1+i)^{-(n-k)}-1}{(1+i)^{-n}-1}$$

$$V_k = \frac{1 - \left(\frac{1+i}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1+i}{p}\right)^n} = \frac{1 - A^k}{1 - A^n} \quad \left(A = \frac{1+i}{p}\right)$$

$$V'_k = \frac{1 - (1+i)^k}{1 - (1+i)^n}$$

Comparons V_k et V'_k; ce sont des quantités positives, de leur nature; pour $p = 0$, V_k est nulle, pour $p = 1$, $V_k = V'_k$.

V_k va donc en croissant avec p et reste constamment inférieure à V'_k.

Comme p est, en général, une quantité très voisine de 1, on voit que Π, ϖ et V_k sont très voisins de Π', ϖ' et V'_k.

On a évidemment toujours $\Pi > \Pi'$, $\varpi > \varpi'$.

Puisqu'il y a amortissement par anticipation d'une partie des titres, la prime doit être plus élevée. Il reste moins de titres à amortir en fin de période et des sommes moins élevées à mettre en réserve.

Si l'on désigne par ϖ_1, la prime pure de capital différé comprise dans la prime ϖ, on a $\varpi = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}} + \varpi_1$.

On a les relations évidentes

$$\varpi_1 \times \frac{1 + a_0^{n-1}}{P_0^n} = 1 \qquad \frac{\varpi'(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}{(1+i)^{-n}} = 1$$

$$1 + a_0^{(n-1)} < (1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad P_0^n < (1+i)^{-n}$$

On a également $\varpi_1 < \varpi'$, la prime pure du capital différé avec mortalité étant inférieure à la prime du capital sans mortalité.

Méthode de tirages. — Report des restes. — Nous avons vu antérieurement, dans le cas d'une loi de mortalité générale et discontinue, que les titres étaient rangés par séries suivant l'âge. Si N_0 est le nombre de titres souscrits dans l'année qui précède le premier tirage (nous avons supposé que la société de capitalisation n'effectuerait qu'un seul tirage en milieu d'année), le premier tirage donne comme amortissement le nombre

$$q_0\, N_0 = n_0 + \alpha_0$$

n_0 étant entier, α_0 étant un nombre fractionnaire inférieur à 1, on amortit n_0 titres et il reste $N_1 = N_0 - n_0$; le nombre N_1 de titres a alors l'âge 1. Ce nouveau groupe, s'il n'est pas diminué de titres résiliés ou rachetés, subira un deuxième tirage au taux q_1. On aura $q_1\, N_1 = n_1 + \alpha_1$; on amortira n_1 titres.

Mais si $\alpha_0 + \alpha_1 = 1 + \beta$, on pourra amortir $n_1 + 1$ titres et il sera créé une deuxième série qui aura N_2 titres. $N_2 = N_1 - n_1 - 1$. Cette deuxième série subira le tirage nº 3 ; on amortira q_2 N_2 titres en reportant le reste β.

Les séries N_1 N_2 N_3 sont des groupes fermés dans lesquels il n'entre plus de titres ; ils proviennent du groupe N_0 formé avant le premier tirage.

Pour opérer les tirages, il suffit de compter les titres en cours au moment de chaque tirage et de faire les calculs q_0 N_0, q_1 N_1, q_2 N_2 avec report des restes. On détermine avant chaque tirage le nombre de titres qui doit être amorti. Pour déterminer les titres à amortir, on peut opérer simplement avec des roues portant chacune les 10 chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Si les nombres des titres N_0, N_1 sur lesquels porte l'amortissement ont 4 chiffres, il suffit de 4 roues pour tirer et désigner un numéro de titres à rembourser.

Si les roues désignaient le numéro d'un titre résilié, on recommencerait le tirage.

Remarque sur l'amortissement au sujet des restes. — Puisque l'on ne peut faire des amortissements partiels de titres, la somme provenant de la fraction de titre non amortie lors d'un tirage est reportée à un tirage suivant et jointe à une autre fraction ; elle peut donner lieu à l'amortissement d'une unité. Les engagements de la société se trouvent diminués puisque la somme à payer est reportée plus tard : mais il est vrai aussi qu'un titre qui devrait être amorti partiellement reste tout entier en cours. Une société qui n'amortirait que les nombres entiers de titres sans reporter les restes introduirait un chargement implicite dans ses tarifs, qui ne serait pas inutile quand les tarifs sont peu chargés (contrat de 15 ans amortissable à raison de 4 °/₀ par an, prime de 5 fr. par mois). La valeur du chargement implicite serait variable et indéterminée.

On peut se demander si une société pourrait amortir à chaque tirage le nombre entier de titres à amortir, soit par excès, soit par défaut à 1/2 unité près. La société amortirait ainsi à certains tirages plus qu'elle ne doit amortir. Y aurait-il compensation entre les restes négligés et les excès de titres payés ? Il est facile de voir qu'en commençant les tirages sur un nombre entier de titres donnant au premier tirage un reste très voisin de l'unité, des tirages successifs donneront tous lieu à des tirages par excès. De même, si l'on commençait le premier tirage par un nombre entier donnant un reste légèrement inférieur à 1/2 unité, tous les tirages successifs donneraient des restes inférieurs à 1/2 unité.

Dans le premier cas la société paierait toujours par excès, dans le deuxième, toujours par défaut.

Il est donc préférable de reporter les restes jusqu'à ce que leur somme puisse donner lieu à l'amortissement d'une unité.

En employant la méthode exposée ci-dessus, on assure un amortissement régulier des titres suivant l'âge.

Dans le cas où le taux de mortalité q_0 q_1 q_2 reste constant, on peut être tenté de mélanger les séries entrantes avec les séries anciennes, le taux d'amortissement étant le même ; cette méthode ne nuit en rien aux intérêts de la société de capitalisation, mais alors les contractants anciens ou nouveaux peuvent être lésés suivant que le hasard favorisera les nouveaux ou les anciens.

En tirant par séries d'âge, il est vrai, il faut que le nombre de titres souscrits N_0 soit assez élevé pour que les tirages puissent commencer, il faut que q_0 N_0 soit au moins égal à l'unité ; si $q_0 = \frac{2}{1000}$ il faut que N_0 soit au moins égal à 500 pour qu'on puisse tirer un titre. Il arriverait aussi avec un si petit nombre que les tirages suivants devraient être supprimés en partie.

La méthode exposée ci-dessus, qui consiste à considérer le contrat de capitalisation comme un contrat d'assurance mixte pour lequel une loi de mortalité est fixée à l'avance et qui, par conséquent amortit à chaque tirage une proportion déterminée à l'avance des titres en cours au moment de ce tirage, a été appelée méthode de tirage sur les titres en cours. Elle proportionne les amortissements anticipés au nombre des titres en cours au moment des tirages.

Loi de mortalité de Moivre. — Nous avons traité le problème des sociétés de capitalisation dans le cas d'une loi de mortalité quelconque, et dans le cas du taux de mortalité constant qui correspond à la loi de survie exponentielle $V_x = p^x V_0$.

Une loi de mortalité avantageuse est la loi de Moivre $V_x = N - x$.

Elle permet, lorsque N atteint un nombre suffisamment élevé, de continuer les tirages jusqu'à la fin du contrat, quand les titres sont groupés en séries, car cette loi amortit au moins un titre à chaque tirage.

Elle donne lieu à la table de mortalité :

$V_0 = N$	les taux sont : $q_0 = \frac{1}{N}$		les probabilités de vie successives sont :	$p_0 = \frac{N-1}{N}$
$V_1 = N-1$	—	$q_1 = \frac{1}{N-1}$	—	$p_1 = \frac{N-2}{N-1}$
$V_2 = N-2$	—	$q_2 = \frac{1}{N-2}$	—	$p_3 = \frac{N-3}{N-2}$
. . . . . .		. . . . . .		
$V_n - N - n$	—	$q_{n-1} = \frac{1}{N-n+1}$		

On voit que les taux de mortalité vont en croissant et que s'il y a N_0 titres entrés au début dans la série d'âge, $N_0 \geqq N$, on pourra tirer au moins un titre à chaque tirage, à condition qu'il n'y ait pas trop de résiliations.

On peut prendre ordinairement $N = 500$ et $V_x = 500 - x$.

Les formules données pour l'assurance mixte s'appliquent toujours à la loi de Moivre.

On a : $$\varpi = \frac{(1 - i a_0^{(n)} - P_0^n)(1+i)^{-\frac{1}{2}} + P_0^n}{1 + a_0^{(n-1)}}$$

si les tirages ont lieu en milieu d'année, ou $$\varpi = \frac{1 - i a_0^{(n)}}{1 + a_0^{(n-1)}}$$

si les tirages ont lieu au début de l'année, c'est-à-dire immédiatement après la souscription des contrats.

Dans le cas de la loi de Moivre, on a :

$$P_0^n = p_0 p_1 p_2 \quad . \quad . \quad . \quad p_n (1+i)^{-n} = \frac{N-n}{N}(1+i)^{-n}$$

$$a_0^{(n)} = \frac{N-1}{N}(1+i)^{-1} + \frac{N-2}{N}(1+i)^{-2} + \ . \ . \ . + \frac{N-n}{N}(1+i)^{-n}$$

$$a_0^{(n)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{1+i}{N i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n-1}\right]$$

$$a_0^{(n-1)} = a_0^{(n)} - \frac{N-n}{N}(1+i)^{-n}$$

Les formules précédentes permettent de résoudre le problème proposé dans le cas de la loi d'amortissement de Moivre.

La formule de récurrence des réserves s'écrit, pour la loi de Moivre :

$$S_{k+1} = \frac{(N-k)(S_k + \varpi)(1+i) - (1+i)^{\frac{1}{2}}}{N-k-1}$$

Pour calculer les réserves par la méthode prospective, il faudrait connaître les annuités $a_1^{(n-1)}$, $a_2^{(n-2)}$, $a_3^{(n-3)}$ correspondant aux âges 1, 2, 3, des titres et pour les durées $n-1$, $n-2$, $n-3$, restant à courir. Les valeurs de ces annuités se déduisent immédiatement de $a_0^{(n)}$, on a :

$$a_k^{(n-k)} = \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$$

$$- \frac{1+i}{(N-k)i}\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i} - (n-k)(1+i)^{-n+k-1}\right]$$

$$a_k^{(n-k-1)} = a_k^{(n-k)} - \frac{N-n}{N-k}(1+i)^{-(n-k)}$$

Une table de commutation, facile à dresser, peut rendre les plus grands services dans l'application de la loi de Moivre.

Calcul des primes fractionnées dans le cas de la loi de Moivre. — (k pair, $k = 2, 4, \ldots, 12$).

On a la relation immédiate :

$$\Pi = \varpi_a (1 + a_0^{(n-1)})$$
$$= \varpi_k \left[1 + (1+i)^{-\frac{1}{k}} + (1+i)^{-\frac{2}{k}} + \cdot\ \cdot\ \cdot + (1+i)^{-\frac{k-1}{2k}}\right]\left[1 + a_0^{(n-1)}\right]$$
$$+ \varpi_k \left[(1+i)^{\frac{k}{2k}} + \cdot\ \cdot\ \cdot + (1+i)^{\frac{2}{k}} + (1+i)^{\frac{1}{k}}\right] a_0^{(n)}$$

$$\Pi = \varpi_k (1 + a_0^{(n-1)}) \frac{(1+i)^{-\frac{1}{2}} - 1}{(1+i)^{-\frac{1}{k}} - 1} + \varpi_k\, a_0^{(n)} (1+i)^{\frac{1}{k}} \frac{(1+i)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1}$$

$$\frac{\Pi}{\varpi_k} = (1+i)^{\frac{1}{k}} \frac{(1+i)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1} \left[(1+i)^{-\frac{1}{2}} (1 + a_0^{(n-1)}) + a_0^{(n)} \right]$$

on aurait : $$\frac{\varpi_a}{\varpi_k} = (1+i)^{\frac{1}{k}} \frac{(1+i)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1} \left[(1+i)^{-\frac{1}{2}} + \frac{a_0^{n}}{1 + a_0^{(n-1)}} \right]$$

La formule s'appliquerait aussi à une loi de mortalité quelconque.

La loi de Moivre a un taux de mortalité croissant avec l'âge. On ne peut donc pas confondre les diverses séries d'âge différent; il faut que chaque série suive la loi d'amortissement complète.

On peut écrire immédiatement la formule donnant la prime pure unique de la mixte-capitalisation dans le cas de la formule de Moivre.

On a : $$\mathrm{N}\,\Pi = (1+i)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} + (\mathrm{N} - n)(1+i)^{-n}$$

Le terme $(\mathrm{N} - n)(1+i)^{-n}$ représente la valeur actuelle des titres au nombre de $\mathrm{N} - n$ restant à amortir à la fin des n années. Le terme $(1+i)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ représente la valeur actuelle des titres amortis au milieu de chacune des n années.

Pour trouver ϖ prime annuelle, on peut écrire la relation :

$$\mathrm{N}\,\Pi = \mathrm{N}\varpi + (\mathrm{N}-1)\varpi(1+i)^{-1} + \ldots$$
$$+ (\mathrm{N} - n + 1)\varpi(1+i)^{-(n-1)}$$

D'où l'on voit que $\frac{\mathrm{N}\,\Pi}{\mathrm{N}\,\varpi} = (1 + a_0^{(n-1)})$ (annuité trouvée précédemment).

Dans le cas où l'on emploie la méthode des titres en cours avec la loi de l'exponentielle, on pourrait, pour rendre plus rapides les tirages au sort, attribuer un numéro spécial aux titres en cours (un numéro de tirage à chacun de ceux ayant droit de participer aux tirages). On pourrait même rompre les séries d'âges et faire des séries de 2.000 (si l'on tire $\frac{1}{2000}$ à chaque tirage). Le tirage dans chaque série de 2.000 serait alors immédiat. Il suffirait de tirer le numéro x compris entre 0 et 2.000 et d'amortir dans chaque série de 2.000 les numéros x, $x + 2.000$, $x + 2 \times 2\,000$, $x + k \times 2.000$. Les opérations seraient très simples. L'amortissement par âge des titres serait assuré. Mais l'opération de numérotage des titres au moment du tirage serait très longue et il y aurait des difficultés pour faire connaître aux contractants les nouveaux numéros attribués à leurs contrats.

Dans le cas où la société de capitalisation ne tient pas absolument à amortir par âge les titres, pour éviter les interruptions de numéros, elle pourrait attribuer aux nouveaux contrats les numéros antérieurs devenus vacants par suite de rachat, de résiliation. Elle éviterait ainsi les interruptions et le numérotage des titres ne serait pas nécessaire avant les tirages.

Si l'on conserve les séries d'âge sans numéroter à nouveau les titres, on peut, à cause du taux constant d'amortissement, confondre deux ou plusieurs séries voisines, de façon à former des séries de 2.000. On peut ainsi amortir des nombres entiers de titres, sauf pour la dernière série de 2.000, la plus récente, qui est en cours de placement et qui sera en général incomplète au moment des tirages.

Au début des séries, les résiliations sont nombreuses, mais au bout de quelques années, les résiliations diminuent, les séries nouvelles formées par âge se conservent, et il n'y a plus besoin de mélanger les séries voisines.

Variations des réserves d'un contrat dans le cas du contrat à prime annuelle. — A la fin de l'exercice k, la réserve est S_k ; elle s'accroît brusquement au début de l'exercice $k + 1$ par le paiement de la prime ϖ et devient $S_k + \varpi$. Jusqu'au milieu de l'exercice $k + 1$, elle s'accroît des intérêts et devient

$$(S_k + \varpi)\ (1 + i)^{\frac{1}{2}}$$

puis brusquement, le tirage au sort a lieu et la réserve prend la valeur

$$\frac{(S_k + \varpi)\ (1 + i)^{\frac{1}{2}} - q}{p},$$

en supposant le taux d'amortissement q.

La réserve croît ensuite jusqu'à la fin de l'exercice $k+1$ et devient :

$$S_{k+1} = \frac{(S_k + \varpi)(1+i) - q(1+i)^{\frac{1}{2}}}{p}$$

La réserve d'un contrat subit donc dans une année trois variations brusques discontinues. Les sociétés de capitalisation doivent tenir compte de ces valeurs successives des réserves pour l'évaluation de la réserve individuelle des contrats.

La valeur d'un contrat varie avec l'âge de la série à laquelle il appartient. On peut supposer que tous les contrats entrés du 1[er] juillet d'une année au 30 juin de l'année suivante, c'est-à-dire après le tirage de l'année considérée et avant le tirage de l'année suivante, forment une série, dont le point de départ est le 1[er] janvier de l'année suivante.

Valeurs de réduction et de rachat des contrats. — Comme dans le contrat mixte d'assurance sur la vie, les valeurs de réduction des contrats peuvent être obtenues par la méthode de réduction proportionnelle qui s'exprime par la formule suivante :

$$\text{valeur de réduction} = \frac{p}{m} \times C,$$

p étant le nombre des primes entières payées par le contractant.

Il n'est pas tenu compte des fractions de primes annuelles :

m, le nombre de primes totales à payer sur le contrat;
C, le capital à reconstituer.

La valeur du contrat réduit se paie comme le capital entier à la fin du contrat.

Les contrats réduits peuvent ou non continuer à participer aux tirages par anticipation ; ils peuvent également être exclus ou non de la participation aux bénéfices. Ces deux points sont peu importants, et diverses solutions ont été adoptées.

Les valeurs de rachat peuvent être obtenues en escomptant les valeurs de réduction correspondantes (au taux de 4 ou 5 °/₀ si le taux des tarifs est de 3 1/2 °/₀) pour le temps restant à courir jusqu'à la fin du contrat.

La valeur de rachat au taux de 4 °/₀ d'un contrat est donc donnée par la formule :

$$\text{valeur de rachat} = \frac{p}{m} \times C\,(1{,}04)^{-(n-p)}$$

La méthode ci-dessus, pour le calcul de la valeur de rachat, est la plus simple à exposer aux contractants.

Les sociétés pourraient également opérer par la méthode ration-

nelle des Sociétés d'assurances sur la vie : les valeurs de rachat seraient obtenues en retranchant de la réserve mathématique des contrats la valeur des frais d'acquisition non amortis, ainsi qu'une petite indemnité de résiliation.

La valeur de réduction se déduirait de la valeur de rachat par la capitalisation certaine ou la capitalisation viagère jusqu'à la fin du contrat (au taux des tarifs).

La valeur des frais d'acquisition non amortis se calcule facilement par la formule connue :

$$F_k = F \frac{1 + a_k^{(n-k-1)}}{1 + a_0^{(n-1)}} ;$$

c'est la valeur après k années, en tenant compte de l'amortissement viager (F désigne la commission payée au début du contrat, F_k la commission restant à amortir après k années).

Pour avoir cette valeur, il suffit de mettre l'annuité calculée, soit d'après la loi de Moivre, soit d'après la loi de l'exponentielle.

On peut aussi employer la méthode de récurrence suivante, qui donne F_k en fonction de F_{k-1} :

$$F_k = \left[F_{k-1} - \frac{F}{1 + a_0^{(n-1)}} \right] \times \frac{1+i}{p},$$

dans le cas de la loi de l'exponentielle où p est constant,

et $$F_k = \left[F_{k-1} - \frac{F}{1 + a_0^{(n-1)}} \right] (1+i) \times \frac{N-k+1}{N-k}$$

dans le cas de la loi de Moivre.

Ces dernières formules peuvent servir également aux Sociétés pour déterminer d'une manière rationnelle le montant des commissions non amorties figurant à l'actif des bilans.

Les titres étant rangés par séries émises en moyenne au 1er janvier de chaque année, la commission restant à amortir sur chacun des contrats de la série est donnée par la formule ci-dessus. On peut ainsi déterminer en bloc et d'un seul coup la valeur des commissions non amorties sur une série d'âge k, c'est-à-dire sur une série qui a subi k tirages.

Cas des contrats à prime unique sortant aux tirages. — Les Sociétés peuvent mettre ces contrats dans la même situation que s'ils avaient été souscrits dès le début à primes annuelles ; ils paient aux contractants le capital assuré C augmenté de la différence entre la réserve du contrat à prime unique et la réserve du contrat à prime annuelle $C + R_u - R_a$.

La quantité $R_u - R_a$ va en décroissant avec l'âge et s'annule à la fin du contrat.

Cette opération revient, comme il est facile de le montrer immédiatement, à payer le capital C assuré et à rembourser au contractant la valeur actuelle des primes annuelles pures restant à payer, évaluées au moyen de l'annuité de la loi de mortalité employée.

S'il y a k années écoulées à la sortie du titre au tirage, la valeur actuelle des primes annuelles restant à payer est

$$\varpi\left[1 + a_k^{(n-k-1)}\right].$$

Or, la valeur de la réserve du contrat à prime annuelle est à cette époque :

$$R_k = \Pi_k^{(n-k)} - \varpi\left[1 + a_k^{(n-k-1)}\right],$$

et la valeur de la réserve du contrat à prime unique est Π_k^{n-k}, valeur de la prime unique d'un contrat d'âge k pour la durée $n-k$ restant à courir. La différence de la réserve du contrat à prime unique et de la réserve du contrat à prime annuelle est donc bien égale à la valeur actuelle des primes annuelles pures restant à payer.

Les sociétés qui opèrent ainsi font bénéficier leurs adhérents à prime unique sortant au tirage d'un avantage auquel ceux-ci n'ont pas droit (1). Le pari ou le contrat ayant été conclu à prime unique, la société n'est tenue que de payer le capital C du contrat. Des sociétés exigent une surprime pour mettre ces contrats à prime unique dans la même situation que les contrats à prime annuelle. Si les sociétés payent le produit de la prime pure ϖ par l'annuité certaine jusqu'en fin de contrat, cette surprime n'est autre que la prime unique d'une assurance d'annuités assurant le paiement des primes pures annuelles ϖ à partir de l'instant où le titre sort au tirage.

La prime unique de l'assurance d'annuité serait :

$$\varpi\left[a^n - a_0^{(n)}\right] \qquad a^{(n)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$a^{(n)}$ annuité certaine, $a_0^{(n)}$ valeur de l'annuité calculée soit par la loi de Moivre, soit par la loi de l'exponentielle.

Si la société, au lieu de rembourser les primes pures ϖ, remboursait les primes brutes (ce qui est plus pratique) restant à payer

(1) Dans les sociétés de capitalisation pratiquant les combinaisons à tirages garantis, la prime unique des contrats est égale à la valeur escomptée des primes annuelles, évaluée en tenant compte de la probabilité d'amortissement des titres. Les contrats à prime unique et à primes annuelles sont donc placés sur un pied d'égalité.

jusqu'à l'échéance du contrat, la prime unique supplémentaire à payer par les souscripteurs serait : $\varpi'' \left[a^{(n)} - a_0^{(n)}\right]$

Dans le cas de paiement de surprime, les sociétés mettent chaque année en réserve la réserve à la prime unique de l'assurance d'annuités. Après k années, cette réserve est donc :

$$\varpi'' \left[a^{(n-k)} - a_0^{(n-k)}\right]$$

Calcul de la prime unique à payer par les souscripteurs dans le cas où les sociétés remboursent la différence des réserves des contrats à prime unique et à prime annuelle. — L'annuité payable d'avance obtenue précédemment est $1 + a_0^{(n-1)} = \dfrac{p^n (1+i)^{-n} - 1}{p(1+i)^{-1} - 1}$

dans le cas de la loi de l'exponentielle.

Nous supposons que les tirages ont lieu en milieu d'année.

La réserve d'un contrat après le $k^{\text{ème}}$ tirage est égale à la réserve du contrat immédiatement avant l'échéance de la $(k+1)^{\text{ème}}$ prime escomptée pour une demi-année. La réserve du contrat à prime unique est $\Pi_{k+1}(1+i)^{-\frac{1}{2}}$, la réserve du contrat à prime annuelle est

$$\left[\Pi_{k+1} - \varpi\left(1 + a_{k+1}^{(n-k-2)}\right)\right](1+i)^{-\frac{1}{2}}$$

La différence des réserves à rembourser est :

$$\varpi\left(1 + a_{k+1}^{(n-k-2)}\right)(1+i)^{-\frac{1}{2}}$$

La valeur actuelle de tous les termes successifs analogues au précédent donne la prime unique de l'opération complémentaire :

$$\Pi = \sum_{k=0}^{k=n-2} \left(1 + a_{k+1}^{(n-k-2)}\right)(1+i)^{-\frac{1}{2}} p^k q (1+i)^{-k+\frac{1}{2}} \times \varpi$$

$$\Pi = \varpi \times q(1+i)^{-1} \times \sum_{k=0}^{k=n-2} p^k (1+i)^{-k} \left[1 + a_{k+1}^{(n-k-2)}\right]$$

Si l'on pose $v = p(1+i)^{-1}$ on doit faire la somme :

$$\sum_{k=0}^{k=n-2} v^k \frac{v^{n-k-1} - 1}{v - 1} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{v^{n-1} - v^k}{v - 1}$$

On obtient $\Pi = \varpi \times \dfrac{q(1+i)^{-1}}{v-1}\left[(n-1)v^{n-1} - \dfrac{v^{n-1} - 1}{v - 1}\right]$

$$\Pi = \varpi \times \frac{q(1+i)^{-1}}{1-v}\left[1 + a_0^{(n-1)} - n v^{n-1}\right]$$

M. Goury (*Bulletin de l'Institut des Actuaires, n° 77*) a proposé la formule suivante pour le calcul de la prime unique complémentaire $\varpi\,(a_x - a_{xx})$, a_x annuité ordinaire de la loi de mortalité adopté, a_{xx}, annuité sur 2 têtes suivant la même loi de mortalité. Avec les notations que nous avons adoptées, la prime unique adoptée par M. Goury serait :

$$\Pi' = \varpi\,\left[1 + a_0^{(n-1)} - \left(1 + a_{00}^{(n-1)}\right)\right]$$

ou $$1 + a_{00}^{(n-1)} = 1 + p^2\,(1+i)^{-1} + p^4\,(1+i)^{-2}$$
$$+ \ldots + p^{2(n-1)}\,(1+i)^{-(n-1)}$$
$$= 1 + p\,v + p^2\,v^2 + \ldots + p^{n-1}\,v^{n-1}$$
$$1 + a_{00}^{(n-1)} = \frac{1 - p^n\,v^n}{1 - p\,v}$$

On aurait donc :

$$\Pi' = \varpi\,\left[\frac{v^n - 1}{v - 1} - \frac{p^n\,v^n - 1}{p\,v - 1}\right]$$

Calculons la quantité $\alpha = 1 + a_0^{(n-1)} - \Pi$ en développant. Nous avons :

$$\alpha = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}$$
$$- q\,(1+i)^{-1} \sum_{k=0}^{k=n-2} p^k\,(1+i)^{-k}\left(1 + a_{k+1}^{n-k-2}\right)$$

$$\alpha = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}$$
$$- q\,(1+i)^{-1}\,(1 + v + v^2 + \ldots + v^{(n-2)})$$
$$- q\,(1+i)^{-1}\,p\,(1+i)^{-1}\,(1 + v + v + \ldots + v^{n-3})$$
$$- q\,(1+i)^{-1}\,p^2\,(1+i)^{-2}\,(1 + v + v + \ldots + v^{n-4})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- q\,(1+i)^{-1}\,p^{n-2}\,(1+i)^{-(n-2)}$$

$$\alpha = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}$$
$$- q\,(1+i)^{-1}\,(1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-2})$$
$$- q\,(1+i)^{-1}\,v\,(1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-3})$$
$$- q\,(1+i)^{-1}\,v^2\,(1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-4})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- q\,(1+i)^{-1}\,v^{n-2}$$

$$\alpha = 1 + p(1+i)^{-1} + p^2(1+i)^{-2} + p^3(1+i)^{-3} + \ldots + p^n(1+i)^{-n}$$
$$- q(1+i)^{-1} - pq(1+i)^{-2} - qp^2(1+i)^{-3} + \ldots - q\,p^{n-1}(1+i)^{-(n-1)}$$
$$- pq(1+i)^{-2} - qp^2(1+i)^{-3} + \ldots - q\,p^{n-2}(1+i)^{-(n-1)}$$
$$- qp^2(1+i)^{-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- q\,p^{n-2}(1+i)^{-(n-1)}$$

Donc :

$$\alpha = 1 + (1-2q)(1+i)^{-1} + p(1-3q)(1+i)^{-2}$$
$$+ p^2(1-4q)(1+i)^{-3} + \ldots + p^{n-2}(1-nq)(1+i)^{-(n-1)}$$

Si l'on remplace $1-2q$ par $(1-q)^2$, $1-lq$ par $(1-q)^l$ on obtient une nouvelle valeur de α

$$\alpha = 1 + p^2(1+i)^{-1} + p^4(1+i)^{-2} + \ldots$$
$$+ p^6(1+i)^{-3} + \ldots + p^{2(n-1)}(1+i)^{-(n-1)}$$

α deviendrait donc égal à $1 + a_{00}^{(n-1)}$; mais on voit que

$$\alpha - \left(1 + a_{00}^{(n-1)}\right) = q^2(1+i)^{-1} + q^3(1+i)^{-2} + q^4(1+i)^{-3} + \ldots$$

Si l'on remplace $1-lq$ par $(1-q)^l$ l'erreur commise est égale à

$$\frac{l(l-1)}{1.2}q^2 - \frac{l(l-1)(l-2)}{1.2.3}q^3 + \ldots$$

Si q est petit, l'erreur est assez faible.

La formule de M. Goury n'est donc qu'approximative et elle donne un nombre un peu trop faible.

Dans le cas du contrat de 15 ans (capital 1.000 francs) et d'un amortissement de $\frac{2}{1000}$ par an, on obtient les chiffres suivants :

Par la formule rigoureuse

$$\Pi = \frac{2}{1000\,(1{,}035 - 0{,}998)}$$
$$\left[\frac{(0{,}998)^{15}(1{,}035)^{-15} - 1}{0{,}998\,(1{,}035)^{-1} - 1} - 15\,(0{,}998)^{14}(1{,}035)^{-14}\right]$$

et par la formule approximative

$$\Pi' = \left[\frac{(0{,}998)^{15}(1{,}035)^{-15} - 1}{0{,}998\,(1{,}035)^{-1} - 1} - \frac{(0{,}998)^{30}(1{,}035)^{-15} - 1}{(0{,}998)^2(1{,}035)^{-1} - 1}\right]$$

La prime du contrat étant 50,18, on trouve pour Π la valeur 7,484 et Π′ la valeur 7,409.

Les réserves successives se calculent par la formule :

$$\Pi_k = \varpi \times \frac{q(1+i)^{-1}}{1-v}\left[1 + a_k^{(n-k-1)} - (n-k)\,v^{n-k-1}\right]$$

Transformation des contrats. — On peut échanger un contrat contre un autre. Dans l'échange, la société devrait tenir compte au contractant de la réserve du contrat échangé. S'il y a k primes entières annuelles payées, et s'il s'est écoulé k années, la réserve du contrat ancien est V_k. La société devrait délivrer au contractant un contrat d'une autre catégorie libéré d'un certain nombre de primes, tel que la réserve du nouveau contrat soit à peu près V_k. La durée écoulée sur le nouveau contrat peut être déterminée approximativement par interpolation entre deux réserves annuelles voisines comprenant la réserve V_k.

Ordinairement, les sociétés opèrent d'une autre façon. Si le contrat ancien est libéré de k primes annuelles, les sociétés délivrent en échange un contrat comportant une prime annuelle égale, mais pour lequel le contractant est exonéré des k dernières primes. De sorte que l'échange donne une indemnité à la société ; en effet, au lieu de tenir compte de la réserve V_k du contrat, la Société tient compte au contractant de $V_k\,(1+i)^{-m}$, m étant la durée du nouveau contrat. Si le contrat nouveau différait du premier par la prime, le capital assuré, la proportion des tirages, sa réserve après k primes serait V'_k, la valeur d'échange de ce contrat deviendrait :

$$V'_k\,(1+i)^{-m}$$

Or, en général, $V'_k\,(1+i)^{-m}$ sera toujours plus petit que V_k. On escompte en somme la réserve du contrat échangé, ce qui diminue la valeur de ce contrat.

Chargement des primes des contrats de capitalisation. — Les contrats donnent lieu à des frais d'acquisition, des frais d'encaissement et des frais de gestion. La commission d'acquisition F est connue ; elle correspond à une fraction de la première prime annuelle, demi-prime d'ordinaire ; on pourra la prendre égale à une valeur fixe.

Les frais d'encaissement sont fixés en pour 100 de la prime brute annuelle ou unique $\frac{e}{100}$.

Les frais de gestion, désignés par g, peuvent être fixés annuellement à un chiffre connu.

On aura :

$$\Pi'' = \frac{\Pi + F + g\left(1 + a_0^{(n-1)}\right)}{1 - \frac{e}{100}}$$

$$\varpi'' = \frac{\varpi + g + \frac{F}{1 + a_0^{(n-1)}}}{1 - \frac{e}{100}}$$

Dans le cas du contrat de 1.000 francs payables en 15 ans (primes de 5 francs par mois).

Si F = 30 francs, $e = 5$ (frais d'encaissement 5 %), $g = 2{,}15$.

Pour le fractionnement par mois ϖ'' sera majoré de 2 % ; la prime mensuelle sera donc de 5 francs.

Les formules ci-dessus s'appliquent évidemment, quelle que soit la loi de mortalité. Cependant, on peut dire que deux lois seulement sont à employer pour leur simplicité : la loi $V_x = N - x$ et la loi $V_x = p^x V_0$.

Les nombres N, p, V_0 sont déterminés par la nature même des choses, car il faut déterminer des conditions des contrats : valeur des capitaux assurés, primes mensuelles, durée de contrats, qui soient des nombres entiers simples. Aussi le contrat de 15 ans, à primes mensuelles de 5 francs, payable par 1.000 francs au bout de 15 ans, ou par anticipation, s'est imposé par sa simplicité.

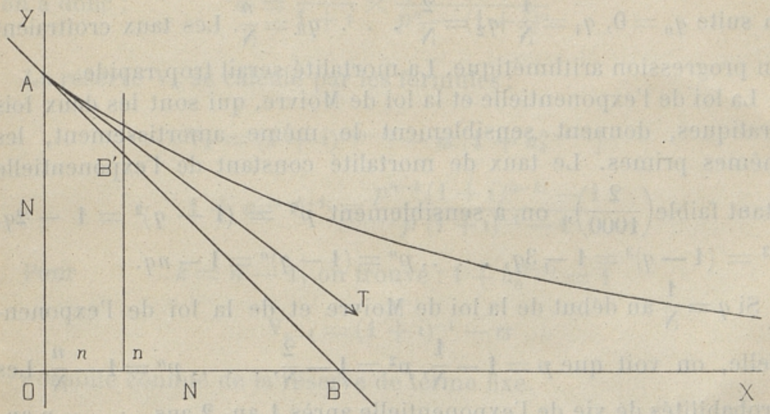
La valeur des chargements sera donc imposée par la nature des choses le plus souvent.

Choix d'une loi de mortalité pour le problème de capitalisation. — La loi choisie doit avoir une mortalité faible, car l'amortissement anticipé se fait au moyen des primes spéciales de l'assurance temporaire, dont la valeur ne peut être exagérée si l'on veut que la prime totale de la combinaison ne soit pas trop élevée. Dans le cas de la loi de l'exponentielle appliquée au contrat de 15 ans, on ne peut guère dépasser une proportion de $\frac{4}{1000}$ par année sur les titres en cours. Les différents taux étant égaux dans cette loi à $\frac{1}{N}$, il faut que N soit suffisamment grand, N varie de 250 à 500.

Une société ne peut donc tirer sur les titres en cours que lorsqu'elle a au moins N titres en cours.

La loi de Moivre, dont les taux de mortalité successifs sont $\frac{1}{N}$ $\frac{1}{N-1}$ $\frac{1}{N-K}$ donne une mortalité croissante plus rapide que la

loi de l'exponentielle. Aussi pour ne pas avoir une prime trop forte, on peut choisir N plus grand dans la loi de Moivre que dans la loi de l'exponentielle.



La loi de l'exponentielle est représentée par une exponentielle partant d'un point A tel que O A = N.

La loi de Moivre par une droite partant de A (O A = N) et coupant l'axe des x en B, tel que O B = N.

Les deux courbes de mortalité ne sont cependant utilisées que sur une petite portion, celle qui est comprise entre O Y et la parallèle n B′ à O Y, telle que O n = n durée du contrat, n est toujours très petit par rapport à N.

La loi de l'exponentielle est représentée par la courbe $y = N a^x$ ($a < 1$). La loi de Moivre par $y = N - x$. L'exponentielle est toujours au-dessus de la droite de Moivre. La tangente en A à l'exponentielle est au-dessus de la droite de Moivre.

Parmi les courbes $y = N - f(x)$ la seule acceptable en pratique est celle pour laquelle $f(x) = x$. C'est la loi de Moivre.

Si l'on prenait $f(x) = x^2$, $f(x) = x(x+1)$, $f(x) = x(x-1)$, la mortalité serait trop rapidement croissante. La fonction $f(x)$ doit croître, mais très peu rapidement.

Si l'on cherche parmi les courbes $y = N f(x)$, il faut que $f(x)$ soit une fonction décroissante. La fonction $y = N a^x$ est acceptable. Les fonctions $y = \frac{N}{x+a}$ qui sont des hyperboles, donneraient lieu à des taux de mortalité décroissants et ne pourraient être utilisées pratiquement.

En partant directement des taux annuels de mortalité, on est amené naturellement à prendre la suite des taux constants sous la forme $q_0 = \frac{1}{N}$ $q_1 = \frac{1}{N}$ . . .; de même, on considère $q_x = \frac{1}{N-x}$

donnant $q_0 = \frac{1}{N}$ $q_1 = \frac{1}{N-1}$ $q_2 = \frac{1}{N-2}$. Si l'on prenait $q_x = \frac{1}{N+x}$ on voit que les taux décroîtraient. Si l'on prenait $q_x = \frac{x}{N}$ on aurait la suite $q_0 = 0$, $q_1 = \frac{1}{N}$ $q_2 = \frac{2}{N}$ . . . $q_n = \frac{n}{N}$. Les taux croîtraient en progression arithmétique. La mortalité serait trop rapide.

La loi de l'exponentielle et la loi de Moivre, qui sont les deux lois pratiques, donnent sensiblement le même amortissement, les mêmes primes. Le taux de mortalité constant de l'exponentielle étant faible$\left(\frac{2}{1000}\right)$, on a sensiblement $p^2 = (1-q)^2 = 1-2q$, $p^3 = (1-q)^3 = 1-3q$, . . ., $p^n = (1-q)^n = 1-nq$.

Si $q = \frac{1}{N}$ au début de la loi de Moivre et de la loi de l'exponentielle, on voit que $p = 1 - \frac{1}{N}$, $p^2 = 1 - \frac{2}{N}$, . . ., $p^n = 1 - \frac{n}{N}$. Les probabilités de vie de l'exponentielle après 1 an, 2 ans, . . ., n années sont donc sensiblement égales aux probabilités de vie de la loi de Moivre.

Si q a une valeur assez grande, la loi de l'exponentielle à une mortalité plus faible. Elle donne lieu à une annuité plus forte que la loi de Moivre.

Capitalisation à terme fixe. — On peut imaginer une opération de capitalisation analogue à la terme fixe en assurance sur la vie. Ce serait une opération dans laquelle les titres sortis aux tirages cesseraient de payer les primes et toucheraient à l'échéance le capital assuré.

La formule est immédiate pour la prime annuelle :

$$\varpi = \frac{(1+i)^{-n}}{1 + a_0^{(n-1)}}$$

$$a_0^{(n)} = P_0^1 + P_0^2 + \ldots + P_0^{(n)} \qquad P_0^n = p_0\, p_1 \ldots p^{n-1}\,(1+i)^{-n}$$

On peut choisir une loi de mortalité quelconque, discontinue. On peut adopter la loi de Moivre $V_x = N - x$ ou la loi de l'exponentielle $V_x = p^x\, V_0$ pour les valeurs entières de x. La prime de la terme fixe est inférieure à celle de la mixte pour le même taux de mortalité ; on pourrait donc se constituer un capital déterminé à une époque fixée d'avance avec des primes moindres.

On pourrait encore, comme dans la mixte, faire des amortissements par séries ; le calcul des réserves, des réductions, des rachats des primes fractionnées est le même que dans la mixte.

Dans le cas du taux de mortalité constant (loi de l'exponentielle),

on a : $$1 + a_0^{(n-1)} = \frac{p^n (1+i)^{-n} - 1}{p(1+i)^{-1} - 1}$$

on a donc : $$\varpi = \frac{1}{1+i} \times \frac{p - (1+i)}{p^n - (1+i)^n}$$

La réserve V_k se calcule par les formules :

$$V_k = (1+i)^{-(n-k)} - \varpi \left[1 + a_k^{n-k-1}\right]$$

$$1 + a_k^{(n-k-1)} = \frac{p^{n-k}(1+i)^{(n-k)} - 1}{p(1+i)^{-1} - 1}$$

Pour $k = n - 1$, on trouve : $1 + a_0^{(n-1)} = 1$

$$V_{n-1} = (1+i)^{-1} - \varpi$$

Formule connue de la réserve de terme fixe.

Assurance d'amortissement par une société de capitalisation. — La formule de la prime unique est analogue à celle de l'assurance d'annuités en assurance sur la vie :

$$\Pi = a^n - a_0^n = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - a_0^{(n)}$$

Dans le cas d'une loi quelconque de mortalité, nous avons vu comment se calculait $a_0^{(n)}$; de même, dans le cas de la loi de Moivre et de la loi de l'exponentielle.

Dans la loi de l'exponentielle :

$$a_0^{(n)} = p(1+i)^{-1} \times \frac{p^n (1+i)^{-n} - 1}{p(1+i)^{-1} - 1} \qquad a_0^n < a^{(n)}$$

$$a_0^{(n)} = a^{(n)} \text{ pour } p = 1$$

Dans la loi de Moivre :

$$a_0^{(n)} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{1+i}{N i}\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n-1}\right]$$

Dans le cas de la loi de Moivre :

$$\Pi = \frac{1}{N i}\left[(1+i)\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n}\right]$$

La combinaison se fera plutôt à prime annuelle, payable pendant une durée $n - 5$ inférieure de 5 ans à la durée de l'assurance d'annuités, pour éviter les réserves négatives au début du contrat.

Dans le cas de la loi de l'exponentielle :

$$1 + a_0^{(n-5)} = \frac{p^{n-4}(1+i)^{-(n-4)} - 1}{p(1+i)^{-1} - 1}$$

Dans la loi de Moivre :

$$a_0^{(n-5)} = \frac{1-(1+i)^{-(n-5)}}{i}$$
$$- \frac{1+i}{Ni}\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-5)}}{i} - (n-5)\,(1+i)^{-n+4}\right]$$

Nous avons rencontré l'assurance d'amortissement dans le cas de l'opération complémentaire pour le remboursement des primes restant à payer sur un contrat de capitalisation sorti au tirage au sort.

Les Sociétés pourraient réaliser l'opération suivante : les adhérents paieraient au commencement de chaque année, pendant n années, 1 franc, plus la prime annuelle de l'assurance d'annuités. La Société paierait aux contractants la valeur des francs capitalisés pendant n années, soit

$$(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

L'assurance d'annuités, pour ceux des adhérents dont les titres sortiraient aux tirages, les couvrirait du paiement de l'annuité de 1 franc restant à payer jusqu'à la fin des n années. Les adhérents pourraient aussi payer 1 franc par mois et une prime d'assurances d'annuités fractionnée par mois ; on considérerait alors des annuités fractionnées.

Assurance temporaire de capitalisation. — Capital différé par la capitalisation. — Les deux combinaisons envisagées ont, dans la capitalisation, une signification évidente. Leur combinaison forme l'assurance mixte, qui est la combinaison réalisée par les Sociétés. Elles n'ont pas d'intérêt prises séparément.

Chapitre II

Opérations de capitalisation à tirages mensuels avec paiement de primes mensuelles

(*Méthode de tirage sur les titres en cours*)

Dans les sociétés importantes ayant une grosse production on peut procéder à des amortissements mensuels ; bien entendu, le taux d'amortissement sera 12 fois plus petit que le taux fixé dans le cas de l'amortissement annuel. La proportion des amortissements anticipés étant naturellement très faible, les 12 amortissements annuels ne peuvent amortir plus de titres proportionnellement qu'un seul amortissement annuel, sans cela il faudrait demander aux souscripteurs une prime annuelle beaucoup plus importante.

Le problème posé est analogue au problème résolu précédemment dans lequel la prime était annuelle et l'amortissement était effectué en milieu d'année ; il suffit d'adopter les mêmes formules en prenant pour période le mois au lieu de l'année, pour taux de capitalisation le taux mensuel équivalent au taux annuel précédemment adopté. La durée du contrat devient 12 n au lieu de n.

Nous poserons les formules du problème dans le cas de la loi de l'exponentielle et de la loi de Moivre.

Loi de l'exponentielle ou taux de mortalité mensuel constant :

$$j = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 \qquad \text{Si } i = 0{,}035 \quad j = 0{,}00287$$

On a :
$$\varpi_m = q\,(1+j)^{-\frac{1}{2}} + \frac{p^{12n}\,(1+j)^{-12n}}{1 + a_0^{(12n-1)}}$$

$$1 + a_0^{(12n-1)} = \frac{p^{12n}\,(1+j)^{-12n} - 1}{p\,(1+j)^{-1} - 1}$$

Le taux de mortalité q sera pris égal à $\frac{1}{6000}$ le taux annuel antérieur étant de $\frac{2}{1000}$.

Les réserves successives du contrat à la fin de chaque mois sont données par les formules :

$$V_k = \frac{1 - \left(\dfrac{1+j}{p}\right)^k}{1 - \left(\dfrac{1+j}{p}\right)^{12n}}$$

Pour $k=12$, $k=2\times 12$, $k=3\times 12$, on obtiendra les réserves après 12 périodes, 2×12 périodes, c'est-à-dire les réserves après un an, deux ans, etc...

Entre deux réserves annuelles consécutives V_r et V_{r+1} existe la relation (dans le cas de la loi de l'exponentielle) :

$$V_{r+1}=\frac{1}{p^{12}(1+i)^{-1}}\left[V_r+\frac{1-p^{12}(1+i)^{-1}}{1-p(1+i)^{-\frac{1}{12}}}\left(\varpi-Cq(1+i)^{-\frac{1}{24}}\right)\right]$$

qui se déduit de l'égalité suivante qui est immédiate :

$$V_r+\varpi\left[1+p(1+i)^{-\frac{1}{12}}+\ .\ .\ .\ +p^{11}(1+i)^{-\frac{11}{12}}\right]$$
$$=C\left[q(1+i)^{-\frac{1}{24}}+pq(1+i)^{-\frac{1}{12}-\frac{1}{24}}+\ .\ .\ .\right.$$
$$\left.+p^{11}q(1+i)^{-\frac{11}{12}-\frac{1}{24}}\right]+p^{12}(1+i)^{-1}V_{r+1}$$

ϖ est la prime mensuelle calculée précédemment.

Loi de Moivre. — On amortit 12 titres par an, ou 1 titre par mois, mais le nombre N de la nouvelle formule $V_x=N-x$ est pris 12 fois plus grand que le nombre précédent du problème à amortissement annuel. Ainsi, au lieu de prendre $N=500$, on prendra $N=6000$.

Les annuités $a_0^{(12n)}$ et $a_0^{(12n-1)}$ s'obtiennent par les formules :

$$a^{(12n)}=\frac{1-(1+j)^{-12n}}{j}-\frac{1+j}{Nj}\left[\frac{1-(1+j)^{-12n}}{j}-12n(1+j)^{-12n-1}\right]$$

$$a_0^{(12n-1)}=a_0^{(12n)}-\frac{N-12n}{N}(1+j)^{-12n}$$

Les formules de la prime mensuelle d'assurances mixtes étant données par :

$$\varpi_m=\frac{\left[1-j\,a_0^{12n}-P_0^{(12n)}\right](1+j)^{-\frac{1}{2}}+P_0^{12n}}{1+a_0^{(12n-1)}}$$

Cette formule suppose l'amortissement au milieu du mois, le paiement de la prime au début du mois.

Les formules plus haut se simplifient, car on peut remplacer partout $(1+j)^{-12n}$ par $(1+i)^{-n}$.

La formule de récurrence pour le calcul des réserves devient dans le cas de la loi de Moivre :

$$S_{k+1}=\frac{(N-k)(S_k+\varpi)(1+j)-(1+j)^{\frac{1}{2}}}{N-k-1}$$

On pourrait aussi résoudre le problème proposé par l'établissement d'une table de commutation en prenant le mois pour période. On calculerait les quantités D_x, N_x, C_x, M_x, pour toutes les valeurs de n depuis 1 jusqu'à 12 n.

Si la durée du contrat est de 15 ans, n variera de 1 à $12 \times 15 = 180$.

La prime ϖ_m sera donnée par la formule :

$$\varpi_m = \frac{M_0 - M_{12n} + D_{12n}}{N_0 - N_{12n}}$$

Les réserves successives par la méthode prospective seraient données par la formule :

$$V_k = \frac{M_k - M_{12n} + D_{12n}}{D_k} - \varpi_m \frac{N_k - N_{12n}}{D_k}$$

La réserve V_k est la réserve à la fin de la $k^{\text{ème}}$ période. Le taux mensuel adopté sera comme plus haut le taux j équivalent au taux annuel i.

Dans le cas de l'amortissement mensuel (au milieu de chaque mois) les séries seront formées par les titres placés du milieu de chaque mois au milieu du mois suivant, c'est-à-dire après le tirage d'amortissement effectué au milieu d'un mois jusqu'au prochain tirage qui a lieu au milieu du mois suivant. Une société opérant ainsi constituera donc 12 séries par an, chacune devra comprendre environ 6000 titres pour qu'on puisse amortir d'une manière continue en adoptant le taux ordinaire de $\frac{2}{1000}$ par an, ou $\frac{1}{6000}$ par mois.

Le procédé ne peut donc s'appliquer qu'à une société déjà ancienne et produisant à peu près 72.000 titres par an. Au début d'une société, on pourrait, pour faciliter les tirages confondre en une seule les six premières séries, puis les six suivantes ; il n'y aurait ainsi que deux séries par an. Ce procédé créerait des inégalités entre les divers titres, mais permettrait de tirer dès les premiers tirages et d'une manière ininterrompue.

Pour calculer une prime annuelle équivalente aux 12 primes mensuelles ϖ_m calculées comme précédemment, on appliquera la formule

$$\varpi_a = \varpi_m \left[1 + p(1+i)^{-\frac{1}{12}} + p^2(1+i)^{-\frac{2}{12}} + \ldots + p^{11}(1+i)^{-\frac{11}{12}}\right]$$

dans le cas de la loi de l'exponentielle.

La prime unique correspondante serait :

$$\Pi = q(1+j)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{p^{12n}(1+j)^{-12n} - 1}{p(1+j)^{-1} - 1} + p^{12n}(1+j)^{-12n}$$

$$\text{ou} \quad \Pi = q\,(1+j)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{p^{12n}\,(1+i)^{-n} - 1}{p\,(1+j)^{-1} - 1} + p^{12n}\,(1+i)^{-n}$$

$$\Pi = \frac{q}{12}(1+i)^{-\frac{1}{24}} \times \frac{\left(1-\frac{q}{12}\right)^{12n}(1+i)^{-n} - 1}{\left(1-\frac{q}{12}\right)(1+i)^{-\frac{1}{12}} - 1} + \left(1-\frac{q}{12}\right)^{12n}(1+i)^{-n}$$

Dans cette dernière formule, les calculs sont effectués au taux annuel i, le taux d'amortissement adopté est de $\frac{q}{12}$ au lieu de q annuel, la durée du contrat est n.

Le rapport $\frac{\varpi_a}{\varpi_m}$ ci-dessus s'écrit :

$$\frac{\varpi_a}{\varpi_m} = \frac{p^{12}\,(1+i)^{-1} - 1}{p\,(1+i)^{-\frac{1}{2}} - 1}$$

il se calcule ainsi en fonction du taux i annuel et du taux annuel d'amortissement q.

Dans le cas de la loi de Moivre, la prime Π unique équivalente aux primes ϖ_m est égale à : $\varpi_m(1 + a_0^{(12n-1)})$.

$$a_0^{(12n)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{12}} - 1} - \frac{(1+i)^{\frac{1}{12}}}{N\left[1+i)^{\frac{1}{12}} - 1\right]} \times$$

$$\times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{12}} - 1} - 12n\,(1+i)^{-n}\,(1+i)^{-\frac{1}{12}}\right]$$

$$a_0^{(12n-1)} = a_0^{12n} - \frac{N-12n}{N}\,(1+i)^{-n}$$

Pour retrouver la prime annuelle pure correspondante aux primes mensuelles, il suffit de diviser Π par l'annuité $1 + a_0^{(n-1)}$ qui est égale à :

$$1 + \frac{N-12}{N}(1+i)^{-1} + \frac{N - 2\times 12}{N}(1+i)^{-2} + \ldots$$

$$+ \frac{N - 12\,(n-1)}{N}\,(1+i)^{-(n-1)}$$

C'est la prime calculée dans le cas de l'amortissement annuel unique.

Calcul des primes trimestrielles ou semestrielles équivalentes aux primes mensuelles. — Dans le cas de la loi de l'exponentielle, on peut calculer ϖ_t prime trimestrielle par la formule :

$$\varpi_t = \varpi_m\left[1 + p\,(1+i)^{-\frac{1}{12}} + p^2\,(1+i)^{-\frac{2}{12}}\right]$$

p probabilité de survie à un tirage mensuel.

On a donc :

$$\frac{\varpi_t}{\varpi_m} = \frac{p^3 (1+i)^{-\frac{3}{12}} - 1}{p (1+i)^{-\frac{1}{12}} - 1}$$

La prime semestrielle se déduirait de la prime mensuelle par la formule :

$$\frac{\varpi_s}{\varpi_m} = \frac{p^6 (1+i)^{-\frac{6}{12}} - 1}{p (1+i)^{-\frac{1}{12}} - 1}$$

Dans le cas de la loi de Moivre, on peut calculer la prime trimestrielle ou la prime semestrielle, en divisant la prime unique Π obtenue précédemment par l'annuité trimestrielle ou l'annuité semestrielle.

Ces annuités seraient calculées par les formules ordinaires :

$$1 + \frac{N-3}{N}(1+i)^{-\frac{1}{4}} + \frac{N-2\times 3}{N}(1+i)^{-\frac{2}{4}} + \ldots$$
$$+ \frac{N-(4n-1)3}{N}(1+i)^{-\left(n-\frac{1}{4}\right)}$$

et
$$1 + \frac{N-6}{N}(1+i)^{-\frac{1}{2}} + \frac{N-2\times 6}{N}(1+i)^{-\frac{2}{2}} + \ldots$$
$$+ \frac{N-(2n-1)6}{N}(1+i)^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)}$$

La valeur de ces annuités se calcule facilement.

Dans le cas de la loi de l'exponentielle, on remarquera que l'on a entre les différentes annuités fractionnées les rapports suivants déjà écrits plus haut :

$$\frac{1+a_{12}}{1+a_1} = \frac{p^{12}(1+i)^{-1} - 1}{p(1+i)^{-\frac{1}{12}} - 1} \qquad \frac{1+a_{12}}{1+a_4} = \frac{p^3(1+i)^{-\frac{3}{12}} - 1}{p(1+i)^{-\frac{1}{12}} - 1}$$

$$\frac{1+a_{12}}{1+a_2} = \frac{p^6(1+i)^{-\frac{1}{12}} - 1}{p(1+i)^{-\frac{1}{12}} - 1}$$

Remarque. — Dans le cas où l'amortissement mensuel est le douzième de l'amortissement annuel précédemment envisagé, on peut adopter les mêmes primes uniques et annuelles que dans le cas de l'amortissement annuel.

Dans le cas de la loi de Moivre, on a les valeurs :

$$\Pi = \frac{(1+i)^{\frac{1}{2}}}{N} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{N-n}{N}(1+i)^{-n}$$

$$\varpi = \frac{\Pi}{1 + a_0^{(n-1)}}$$

Dans le cas de la loi de l'exponentielle :

$$\Pi = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[1 + a_0^{(n-1)}\right] + p^n\,(1+i)^{-n}$$

$$\varpi = q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}} + \frac{p^n\,(1+i)^{-n}}{1 + a_0^{(n-1)}}$$

Dans le cas d'un amortissement en k fois par an, le taux étant $\frac{q}{k}$ à chaque tirage, les formules donnent une prime suffisamment exacte.

Dans le cas où la durée de paiement des primes est inférieure à la durée de capitalisation, on calcule la prime unique Π en se servant d'une annuité de durée égale à la durée de capitalisation. On envisage en outre l'annuité de paiement des primes de durée égale à la durée de ce paiement.

Ce problème se résout ainsi par la formule fractionnée comme ci-dessus.

Exemple : Contrat de 15 ans amortissable par 1.000 francs en fin de période ou par 12 tirages au sort mensuels (tirages au milieu du mois). Proportion d'amortissement $\frac{1}{2400}$ à chaque tirage mensuel.

La prime brute annuelle du contrat est fixée à 72 francs payable pendant 11 ans, une 12e prime annuelle supplémentaire de 61 francs.

Le contrat peut être également libéré : 1° par le paiement de 24 primes semestrielles de 36 francs et une 25e de 1 franc ; 2° par le paiement de 48 primes trimestrielles de 18 francs et une 49e de 7 francs.

La prime mensuelle est fixée à 6 francs pendant les 145 premiers mois (12 ans et 1 mois), une 146e prime de 5 francs est également payable.

Il s'agit de calculer les différentes primes pures du contrat sachant que le chargement est uniforme pour chaque catégorie de primes.

La prime unique pure Π du contrat s'obtient par la formule :

$$\Pi = \frac{1000}{2400} \times (1{,}035)^{-\frac{1}{24}} \times \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2400}\right)^{180} (1{,}035)^{-15}}{1 - \left(1 - \frac{1}{2400}\right)(1{,}035)^{-\frac{1}{12}}} + 1000\left(1 - \frac{1}{2400}\right)^{180} (1{,}035)^{-15}$$

L'annuité payable d'avance permettant d'obtenir les primes annuelles s'obtient par la formule :

$$1 + a_1 = \frac{\left(1 - \frac{1}{2400}\right)^{144} (1{,}035)^{-12} - 1}{\left(1 - \frac{1}{2400}\right)^{12} (1{,}035)^{-1} - 1} - \frac{11}{72} (1{,}035)^{-11} \left(1 - \frac{1}{2400}\right)^{12 \times 11}$$

L'annuité semestrielle payable d'avance serait de même :

$$1 + a_2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{2400}\right)^{6 \times 25} (1{,}035)^{-\frac{25}{2}} - 1}{\left(1 - \frac{1}{2400}\right)^{6} (1{,}035)^{-\frac{1}{2}} - 1} - \frac{35}{36} (1{,}035)^{-\frac{24}{2}} \left(1 - \frac{1}{2400}\right)^{6 \times 24}$$

L'annuité trimestrielle serait :

$$1 + a_4 = \frac{\left(1 - \frac{1}{2400}\right)^{3 \times 49} (1{,}035)^{-\frac{49}{4}} - 1}{\left(1 - \frac{1}{2400}\right)^{3} (1{,}035)^{-\frac{1}{4}} - 1} - \frac{11}{18} (1{,}035)^{-\frac{48}{4}} \left(1 - \frac{1}{2400}\right)^{3 \times 48}$$

L'annuité payable mensuellement et d'avance serait :

$$1 + a_{12} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2400}\right)^{146} (1{,}035)^{-\frac{146}{12}} - 1}{\left(1 - \frac{1}{2400}\right) (1{,}035)^{-\frac{1}{12}} - 1} - \frac{1}{6} (1{,}035)^{-\frac{145}{12}} \left(1 - \frac{1}{2400}\right)^{145}$$

Chapitre III

Opérations de capitalisation à tirages trimestriels avec paiement de primes trimestrielles

(Méthode de tirage sur les titres en cours)

On peut procéder à des tirages trimestriels en adoptant un taux trimestriel quatre fois plus petit que le taux annuel que nous avons précédemment indiqué. Les amortissements se feront en milieu de période et les paiements de primes au début de la période.

Le problème se résout par des formules analogues à celles du contrat à prime annuelle et à amortissement annuel; le trimestre devient la période de capitalisation, le taux de capitalisation est le taux trimestriel équivalent au taux annuel i précédemment adopté. La durée du contrat devient $4n$ au lieu de n.

Dans le cas de la loi de l'exponentielle

$$1 + a_0^{(4n-1)} = \frac{p^{4n}(1+j)^{-4n} - 1}{p(1+j)^{-1} - 1}$$

$$\omega_t = q(1+j)^{-\frac{1}{2}} + \frac{p^{4n}(1+j)^{-4n}}{1 + a_0^{(4n-1)}} \qquad j = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1$$

Le taux de mortalité trimestriel sera pris égal $\frac{2}{4 \times 1000}$ ou $\frac{1}{2000}$, le taux annuel antérieur étant de $\frac{2}{1000}$, on prendra $p = 1 - q$.

Les réserves successives du contrat à la fin de chaque trimestre seront données par les formules :

$$V_k = \frac{1 - \left(\frac{1+j}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1+j}{p}\right)^{4n}}$$

Pour $k = 4$, $k = 2 \times 4$, . . ., $k = 3 \times 4$, on obtiendra les réserves après 4 périodes, 8 périodes, c'est-à-dire après un an, deux ans.

Dans le cas de la loi de Moivre, on amortira 4 titres par an, un par trimestre; le nombre N de la formule $V_x = N - x$ est pris quatre fois plus grand que dans le cas de l'amortissement unique en milieu d'année.

Au lieu de $N = 500$, on prendra $N = 2000$.

Les annuités $a_0^{(4n)}$, $a_0^{(4n-1)}$ s'obtiennent par les formules :

$$a_0^{(4n)} = \frac{1-(1+j)^{-4n}}{j} - \frac{1+j}{Nj}\left[\frac{1-(1+j)^{-4n}}{j} - 4n(1+j)^{-4n-1}\right]$$

$$a_0^{(4n-4)} = a_0^{(4n)} - \frac{N-4n}{N}(1+j)^{-4n}$$

La formule de récurrence appliquée au calcul des réserves dans le cas de la loi de Moivre donne :

$$S_{k+1} = \frac{(N-k)(S_k+\varpi)(1+j)-(1+j)^{\frac{1}{2}}}{N-k-1}$$

On pourrait aussi résoudre le problème proposé par des commutations trimestrielles. Les quantités D_x, N_x, C_x, M_x seraient calculées pour toutes les valeurs de x, de 1 jusqu'à n. Si la durée du contrat est de 15 ans, n variera de 1 à $4 \times 15 = 60$.

La prime ϖ_t sera donnée par la formule :

$$\varpi_t = \frac{M_0 - M_{4n} + D_{4n}}{N_0 - N_{4n}}$$

Les réserves successives par la méthode prospective seraient donnés par la formule :

$$V_k = \frac{M_k - M_{4n} + D_{4n}}{D_k} - \varpi_t \frac{N_k - N_{4n}}{D_k}$$

le taux trimestriel adopté serait le taux équivalent au taux annuel i. On aurait : $j = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1$.

Dans le cas de l'amortissement trimestriel, les séries seront constituées par les titres souscrits du milieu de chaque trimestre au milieu du trimestre suivant. Une société opérant de cette façon constituera donc quatre séries par an, la 5[me] étant commencée en fin d'exercice. Pour qu'on puisse amortir à raison de deux titres sur 1.000 par an, il faudra donc que chaque série comprenne au moins 2.000 titres.

Calcul d'une prime annuelle ou unique équivalente aux quatre primes trimestrielles. — Dans le cas de la loi de l'exponentielle, on appliquera la formule :

$$\varpi_a = \varpi_t\left[1+p(1+i)^{-\frac{1}{4}} + p^2(1+i)^{-\frac{2}{4}} + p^3(1+i)^{-\frac{3}{4}}\right]$$

La prime unique correspondante serait :

$$\Pi = q(1+j)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{p^{4n}(1+j)^{-4n}-1}{p(1+j)^{-4}-1} + p^{4n}(1+j)^{-4n}$$

$$\Pi = \frac{q}{4}(1+i)^{-\frac{1}{8}} \times \frac{\left(1-\frac{q}{4}\right)^{4n}(1+i)^{-n}-1}{\left(1-\frac{q}{4}\right)(1+i)^{-\frac{1}{4}}-1} + \left(1-\frac{q}{4}\right)^{4n}(1+i)^{-n}$$

Dans cette formule, les calculs sont effectués au taux annuel i, le taux d'amortissement adopté est $\frac{q}{4}$ au lieu de q annuel; la durée du contrat est n années.

Le rapport $\frac{\varpi_a}{\varpi_t}$ s'écrit $\frac{p^4(1+i)^{-1}-1}{p(1+i)^{-\frac{1}{4}}-1}$.

On peut l'évaluer en fonction du taux i annuel et du taux annuel d'amortissement.

Dans le cas de la loi de Moivre, la prime unique équivalente aux primes ϖ_t est égale à : $\varpi_t\left[1+a_0^{(4n-1)}\right]$

$$1+a_0^{(4n-1)} = 1+a_0^{(4-n)} - \frac{N-4n}{N}(1+i)^{-n}$$

$$a_0^{(4n)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{4}}-1} - \frac{(1+i)^{\frac{1}{4}}}{N\left[1+i)^{\frac{1}{4}}-1\right]} \times$$

$$\times\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{4}}-1} - 4n(1+i)^{-n}(1+i)^{-\frac{1}{4}}\right]$$

Pour retrouver la prime annuelle pure correspondante aux primes trimestrielles, il suffit de diviser Π par l'annuité $1+a_0^{(n-1)}$, qui est égale à :

$$1+\frac{N-4}{N}(1+i)^{-1}+\frac{N-2\times 4}{N}(1+i)^{-2}\ \ldots$$

$$+\frac{N-4(n-1)}{N}(1+i)^{-(n-1)}$$

Cette annuité a la même valeur que l'annuité étudiée dans le cas de l'amortissement annuel, puisque N est 4 fois plus grand que dans ce cas.

Calcul d'une prime mensuelle équivalente aux primes trimestrielles. — Dans le cas de la loi de l'exponentielle, on peut écrire la relation suivante entre la prime trimestrielle et la prime mensuelle :

$$\varpi_t = \varpi_m\left[1+(1+i)^{-\frac{1}{12}}+p(1+i)^{-\frac{2}{12}}\right]$$

Dans le cas de la loi de Moivre, pour retrouver la prime mensuelle équivalente aux primes trimestrielles, on divise la prime unique par l'annuité fractionnée mensuellement correspondant à des tirages trimestriels.

Cette annuité s'écrit :

$$1+(1+i)^{-\frac{1}{12}}+\frac{N-1}{N}(1+i)^{-\frac{2}{12}}\left[1+(1+i)^{-\frac{1}{12}}\right]$$

$$+(1+i)^{-\frac{4}{12}}\left[1+(1+i)^{-\frac{1}{12}}\right]+\frac{N-2}{N}(1+i)^{-\frac{6}{12}}\left[1+(1+i)^{-\frac{1}{12}}\right]+\ldots$$

ou

$$\left[1+(1+i)^{-\frac{1}{12}}\right]\left[1+\frac{N-1}{N}(1+i)^{-\frac{2}{12}}+(1+i)^{-\frac{4}{12}}\right.$$

$$+\frac{N-2}{N}(1+i)^{-\frac{6}{12}}+(1+i)^{-\frac{8}{12}}+\frac{N-3}{N}(1+i)^{-\frac{10}{12}}\ \ldots$$

$$\left.+(1+i)^{-1}+\frac{N-4}{N}(1+i)^{-1-\frac{2}{12}}\ldots\right]$$

Si les tirages d'amortissement avaient lieu en début de période, les formules ci-dessus seraient simplifiées. On aurait :

$$\varpi_t=\varpi_m\left[1+p\,(1+i)^{-\frac{1}{12}}+p\,(1+i)^{-\frac{2}{12}}\right]$$

L'annuité de la loi de Moivre s'écrirait :

$$1+\frac{N-1}{N}(1+i)^{-\frac{1}{12}}+\frac{N-1}{N}(1+i)^{-\frac{2}{12}}$$

$$+\frac{N-2}{N}(1+i)^{-\frac{3}{12}}+\frac{N-2}{N}(1+i)^{-\frac{4}{12}}\ \ldots$$

$$+\frac{N-3}{N}(1+i)^{-\frac{5}{12}}+\frac{N-3}{N}(1+6)^{-\frac{6}{12}}\ \ldots$$

Ces dernières formules se calculent plus facilement que celle donnée plus haut dans le cas de l'amortissement des titres au milieu du trimestre.

CHAPITRE IV

Opérations de capitalisation comportant plusieurs tirages par mois

(Méthode de tirage sur les titres en cours)

Quelques sociétés réalisant des opérations comportant plusieurs tirages par mois, nous donnerons un exemple de calcul des primes et des réserves d'un contrat de capitalisation correspondant à ces opérations.

Supposons un contrat de durée m (m années) donnant lieu à n tirages par mois, les tirages étant supposés effectués en début de période. Soit q la probabilité d'amortissement d'un titre que nous supposerons constante (loi de l'exponentielle), p la probabilité de vivre après le tirage ($p = 1 - q$).

La prime unique Π pure d'un tel contrat se calculera par la formule :

$$\Pi = q + \frac{(1-q)q}{(1+i)^{\frac{1}{12n}}} + \frac{(1-q)^2 q}{(1+i)^{\frac{2}{12n}}} + \cdots + \frac{q(1-q)^{12mn-1}}{(1+i)^{\frac{12mn-1}{12n}}} + \frac{(1-q)^{12mn}}{(1+i)^{\frac{12mn}{12n}}}$$

En posant : $p(1+i)^{-\frac{1}{12n}} = v$

$$\Pi = q(1 + v + v^2 + \cdots + v^{12mn-1}) + v^{12mn} = q\frac{1 - v^{12mn}}{1 - v} + v^{12mn}$$

La quantité $\frac{1 - v^{12mn}}{1 - v}$ est l'annuité payable d'avance correspondant aux primes payables n fois par mois, immédiatement avant les tirages d'amortissement.

Si nous désignons par ϖ_{12n} la prime payable n fois par mois, ou $12n$ fois par an, nous avons la relation :

$$\Pi = \varpi_{12n} \times \frac{1 - v^{12mn}}{1 - v}$$

Si l'on désigne par ϖ_{12}, ϖ_4, ϖ_2, ϖ_1 les primes mensuelles, trimestrielles, semestrielles et annuelles du contrat précédent, on aura les relations immédiates :

$$\Pi = \varpi_{12} \times \frac{1 - v^{12mn}}{1 - v^n}$$

$$\Pi = \varpi_4 \times \frac{1 - v^{12mn}}{1 - v^{3n}}$$

$$\Pi = \varpi_2 \times \frac{1 - v^{12mn}}{1 - v^{6n}}$$

$$\Pi = \varpi_1 \times \frac{1 - v^{12mn}}{1 - v^{12n}}$$

La réserve après k périodes s'obtient par la formule

$$v^{(12mn-k)} \times \frac{v^k - 1}{v^{12mn} - 1} \text{ où } v = p(1+i)^{-\frac{1}{12n}}$$

Si l'on prend $k = 12n$, on obtiendra la première réserve annuelle.
Si $k = fn$, on aura la réserve écoulée après f mois écoulés.
$k = (f+1)n$ la réserve après $(f+1)$ mois

On peut évaluer seulement les réserves mensuelles en supposant les primes mensuelles ; on a alors, entre deux réserves mensuelles consécutives, la relation :

$$R_{f+1} \times v^n = R_f + \varpi_{12} - q\frac{1 - v^n}{1 - v}$$

Posant $$q\frac{1 - v^n}{1 - v} = t,$$

on a $$R_{f+1} = (R_f + \varpi - t)\frac{1}{v^n}$$

$$R_1 = (\varpi - t)\frac{1}{v^n}$$

$$R_2 = (R_1 + \varpi - t)\frac{1}{v^n} = (\varpi - t)\left(\frac{1}{v^n} + \frac{1}{v^{2n}}\right)$$

. . . .

$$R_f = (\varpi - t)\left(\frac{1}{v^n} + \frac{1}{v^{2n}} + \ . \ . \ . \ + \frac{1}{v^{fn}}\right) = (\varpi - t)\frac{1 - v^{fn}}{v^{fn}(1 - v^n)}$$

Calcul de la commission d'acquisition restant à amortir après f mois ou k années (A_f *ou* A_k). — L'application immédiate d'une formule précédente donne :

$$A_f = F \times \frac{1 - v^n}{1 - v^{-12mn}} \times \frac{1 - v^{(12m-f)n}}{1 - v^n} = F \times \frac{1 - v^{(12m-f)n}}{1 - v^{-12mn}}$$

$$A_k = F\frac{1 - v^{12n(m-k)}}{1 - v^{12mn}}$$

Ces formules supposent les primes payables à raison de n fois par mois.

Si dans les formules précédentes on fait $n = 4$, on obtient les formules concernant le contrat ayant 4 tirages par mois.

Si l'on prend $n = \frac{365}{12 \times 7}$, on a le contrat à primes et tirages hebdomadaires.

Chapitre V

Méthode de tirage sur les titres émis

La méthode de tirage sur les titres en cours exposée dans les chapitres précédents était la plus naturelle, la plus comparable aux opérations d'assurances sur la vie, elle s'imposait à l'esprit. Mais quelques sociétés, qui veulent dès le début de leurs opérations, rembourser des titres par tirages anticipés, en ont adopté une autre que l'on désigne généralement sous le nom de méthode des titres émis. Une application de cette méthode à la loi de mortalité de Moivre a été donnée par M. Goury, ancien secrétaire de l'*Institut des Actuaires français*, dans une communication à l'*Institut* parue dans le *Bulletin* (n° 77, juin 1909). Les formules donnant les primes sont les mêmes que celles que nous avons données précédemment dans le cas de la méthode de tirage sur les titres en cours. L'opération de capitalisation est toujours une assurance mixte composée d'une assurance temporaire en cas de décès jointe à une assurance de capital différé. L'assurance temporaire (cas de la loi de Moivre) amortit 1 titre sur N à chaque tirage que l'on peut supposer effectué en milieu d'année ; si le contrat à une durée n, il reste en vigueur à la fin des n années, N — n contrats qui sont remboursés ; la loi de mortalité est donc telle qu'on amortit 1 contrat sur N au premier tirage, 1 contrat sur N — 1 au deuxième, et ainsi de suite. Mais au lieu d'adopter cette loi de mortalité, exprimée par la formule, on en adopte une autre déterminée par le mode de tirage ; cette méthode diffère peu évidemment de la loi de Moivre, mais elle donne lieu à des écarts sur cette loi.

Voici un exposé de cette méthode : le nombre de base est N. Au moment de l'émission on place dans une roue à étuis un nombre de numéros égal à N ; on tirera un numéro de la roue au premier tirage et on amortira le contrat portant le numéro correspondant; le titre pourra être simplement émis, mais non souscrit ; il pourra être racheté, résilié, dans ce cas la société ne le paiera pas. S'il est souscrit la société paiera le capital assuré par le titre.

Mais au moment du premier tirage la société pourra ne pas avoir émis entièrement le nombre N de titres ; tout se passera cependant comme si elle avait émis ce nombre. En tous cas, le numéro sorti au tirage est retiré de la roue. Si le contrat de numéro correspondant n'était pas émis au moment du tirage, il ne le serait plus.

Si au moment d'un tirage plusieurs tranches de N titres sont émises on désignera comme suit les titres à amortir ou à ne plus

émettre. Si le sort désigne le numéro X compris entre 1 et N (X est le nombre sorti de la roue) on amortira les titres ayant les numéros X, X + N, X + 2 N, X + 3 N, X + pN, dans toutes les tranches.

A chaque tirage, on retirera de la roue le numéro X tiré, ce qui semblera réaliser la loi de mortalité de Moivre ayant le taux de mortalité $q_0 = \frac{1}{N}$ au premier tirage, $q_1 = \frac{1}{N-1}$ au deuxième tirage, et ainsi de suite. Mais comme les tranches de N titres émises contiennent des titres résiliés, non souscrits, les titres sortis ne sont pas tous payés. La loi de Moivre s'appliquerait rigoureusement si les N titres de la première tranche ou des tranches suivantes étaient tous souscrits et en vigueur au moment des tirages, mais il n'en est jamais ainsi.

La mortalité vraie sera donc différente de la loi de Moivre. Elle dépendra des titres résiliés dans les tranches, ou rachetés, ou non souscrits. Les écarts de mortalité ne peuvent être connus d'avance. L'avantage du mode de tirage sur les titres émis est que la désignation des numéros à amortir et la proportion de ces titres à chaque tirage est pour ainsi dire automatique et d'une grande facilité. Elle ne donne pas lieu à des reports de reste. La méthode est réalisée avec une roue à étuis contenant N numéros, roue scellée au début des opérations. Il y a toute garantie sur la sincérité des opérations. Mais un grave inconvénient de la méthode a été signalé par M. Achard (séance mensuelle de l'*Institut des Actuaires français* du 15 avril 1909), c'est le suivant : il sort au tirage des numéros qui ne correspondent pas à des polices existantes et il n'est pas permis aux contractants de vérifier le nombre des titres amortis réellement. Les contractants, en effet, ne connaissent pas le nombre des titres en cours ni le nombre des titres réellement remboursés ; il ne leur est donc pas permis de vérifier la valeur des opérations. Les sociétés qui ont adopté cette méthode publient de longues listes de titres sortis au tirage, mais sans indiquer les titres réellement placés et remboursés et le public ne connaît pas la proportion des titres remboursés.

Cet inconvénient n'existe pas dans la méthode d'amortissement en proportion des titres en cours, qui indique le nombre de titres en cours au moment de chaque tirage et la proportion qui doit être amortie réellement.

Le nombre N de base choisie ne doit pas être trop grand puisqu'il faut placer les N titres aussitôt que possible. Mais, d'un autre côté, il ne peut être choisi trop petit non plus, puisque la proportion des amortissements anticipés doit être faible si l'on veut que la prime payée ne soit pas trop élevée. Dans une société qui amortit un contrat par mois dans le cas du contrat de 15 ans amortissable

par 1.000 francs, nous avons vu que la méthode des titres en cours ne permet pas d'amortir beaucoup plus de 2 titres sur 1.000 par an. En employant la méthode d'amortissement sur les titres émis, on ne peut donc amortir plus de 1 titre sur 6.000 par mois ; il faut donc que N soit voisin de 6.000. S'il était possible d'amortir $\frac{4}{1000}$ par année, N devrait être voisin de 3.000. Comme tous les tirages ont lieu tous les mois, il faut, dans ce dernier cas, que la société place 3.000 titres par mois pour que la méthode puisse s'appliquer sans qu'il y ait de trop gros écarts de mortalité.

Un inconvénient de l'application de la loi de Moivre à la méthode d'amortissement a été signalé par M. Goury (voir *Bulletin* n° 77, juin 1909) : « Les calculs effectués supposent que les N bons choisis comme base des tirages sont souscrits à une date identique ; en réalité la souscription reste ouverte pendant une durée déterminée ; il est toutefois procédé aux tirages aux époques stipulées par les contrats ; il en résulte que les derniers souscripteurs des titres d'une série donnée sont avantagés si on les compare à ceux du début, puisque pour eux le chiffre réel pris comme base des tirages se trouve diminué du nombre des numéros déjà sortis et que cela augmente d'autant la probabilité des remboursements anticipés ».

« L'avantage signalé est obtenu aux dépens de l'entreprise émettrice. »

Pour remédier à cet inconvénient, M. Goury propose de choisir une base initiale telle que les tirages la ramènent exactement à N quand le temps écoulé depuis l'ouverture de la souscription a réduit sa durée de moitié. Si la durée de souscription correspond à p périodes d'amortissement anticipé, la base effective sera $N + \frac{p}{2} = N_1$, N_1 étant un nombre pair. On place donc N_1 numéros dans la roue bien que le calcul des primes ait été effectué sur N titres. Mais cette correction désavantage les premiers titres placés et ramène l'amortissement à sa valeur exacte pour les derniers ; elle ne corrige pas la différence de valeur des titres, c'est pourquoi pour maintenir la comparaison entre les titres il faudra que la période de placement soit aussi petite que possible. Elle ne pourra guère dépasser 4 ans.

Il faut donc imposer, dans le cas où l'on emploie la loi de Moivre avec la méthode des titres émis, une limite à la période de placement des titres. Les titres placés pendant cette période formeront une série qui pourra comprendre plusieurs tranches de N titres. Chaque série aura sa roue distincte. Il est à remarquer que la dernière tranche de la série sera généralement incomplète, elle pourra donner lieu à des écarts de mortalité.

Application de la méthode de tirage sur les titres émis à la loi de l'exponentielle. — La loi de l'exponentielle est $V_x = p^x V_0$.

Le taux de mortalité annuel est constant ; on a $\frac{d_0}{V_0} = 1 - p = q$

d_0 nombre de décès dans la première année, V_0 nombre de vivants au début de l'année.

On a donc $d_0 = qV_0$. On peut déterminer V_0 de sorte que $q_0 V_0 = 1$.

Donc $q_0 = \frac{1}{V_0} = \frac{1}{N}$.

Si l'on part de N titres au début et que l'on prenne l'unité comme décès dans la première année, le taux de mortalité est constant et égal à $\frac{1}{N}$. La probabilité de vie annuelle est $1 - \frac{1}{N}$.

Le nombre des vivants de la table de mortalité est le suivant :

$$V_0 = N$$

$$V_1 = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \times \frac{1}{N}$$

$$V_2 = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 \times \frac{1}{N}$$

. . . .

$$V_p = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^p \times \frac{1}{N}$$

On pourra placer dans une roue à étuis N numéros. A chaque tirage on tirera un numéro de la roue, mais en le remettant aussitôt après le tirage, de sorte qu'il y aura toujours N numéros dans la roue.

Le numéro sorti de la roue étant X, on amortira parmi les titres émis par une société tous ceux qui porteront les numéros

$$X,\ X + N,\ X + 2N,\ X + 3N,\quad \ldots\ldots\quad X + KN.$$

Les titres non placés, résiliés, rachetés, ne seront pas remboursés par la société.

Les formules donnant la prime unique et la prime annuelle d'un contrat $\left(q = \frac{1}{N}\right)$ sont les suivantes :

$$\Pi = \frac{1}{N}(1+i)^{-\frac{1}{2}} \frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n (1+i)^{-n} - 1}{\left(1 - \frac{1}{N}\right)(1+i)^{-1} - 1} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n (1+i)^{-n}$$

$$\varpi = \frac{1}{N}(1+i)^{-\frac{1}{2}} + \left(1-\frac{1}{N}\right)^n (1+i)^{-n} \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)(1+i)^{-n}-1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^n (1+i)^{-n}-1}$$

On remarque qu'il y a toujours N titres dans la roue, la probabilité de sortie d'un titre donné reste toujours $\frac{1}{N}$ à chaque tirage. Mais on peut retirer des titres déjà sortis puisque l'on remet les numéros dans la roue ; on peut tirer des titres non souscrits, déchus ou rachetés. La loi véritable de sortie différera donc de la loi de l'exponentielle.

Si les tirages ont lieu mensuellement, il faudra donc prendre N égal à 3.000 ou 6.000, suivant que la probabilité possible d'amortissement sera de $\frac{2}{1000}$ ou $\frac{4}{1000}$ par an des titres en cours.

L'inconvénient signalé précédemment en appliquant la méthode des tirages sur les titres émis à la loi de Moivre n'existe pas quand on l'applique à la loi de l'exponentielle. Il n'est pas nécessaire de modifier la base des tirages, ni de limiter la durée de l'émission des titres, car les titres ont une valeur indépendante de l'âge, il suffit que les primes payées pour chaque contrat tiennent compte du temps écoulé entre la date d'émission et la date du premier tirage. Si les tirages ont lieu tous les mois, cette dernière correction est négligeable. Pratiquement, tous les titres pourront participer aux tirages avec la même probabilité de sortie.

Etude de la mortalité et de ses écarts dans la méthode des titres émis. — L'emploi de la méthode de tirage sur les titres émis donne donc lieu à une mortalité qui dépend du nombre de titres en cours dans chaque groupe de N titres formé par la série émise. Ce nombre peut être très variable, il dépend du nombre de titres résiliés, rachetés, réduits ou déjà sortis à des tirages précédents ou non encore souscrits. Ce nombre sera variable avec les différents groupes, il pourra même varier avec les différentes sociétés de capitalisation. Il est évident que les anciennes sociétés constitueront des séries beaucoup plus stables que les jeunes sociétés.

Il est donc difficile d'évaluer les écarts possibles de la mortalité et de déterminer le chargement de la prime pure destiné à couvrir les augmentations éventuelles du risque. Il serait cependant utile de donner une valeur de ce chargement, ainsi du reste que de la valeur de la réserve du risque, réserve qu'il est nécessaire de constituer chaque année pour parer au risque de mortalité.

Essayons de donner une valeur du chargement de risque dans le cas où l'on applique la loi de l'exponentielle à la méthode des titres

émis. Nous supposerons une combinaison de capitalisation dans laquelle on procède tous les mois à un tirage ; le nombre de base N est pris égal à 3.000 ; on tire un titre chaque mois ou 12 titres par an. Le taux annuel de mortalité est donc de $\frac{4}{1.000}$, relativement élevé. Il est de $\frac{1}{3.000}$ par mois.

Le taux reste constant et les écarts de mortalité n'influent d'une manière sensible que sur l'assurance temporaire en cas de décès.

La formule qui donne la prime annuelle est :

$$\varpi = \frac{1}{N}(1+i)^{-\frac{1}{2}} + \left(1-\frac{1}{N}\right)^n (1+i)^{-n} \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)(1+i)^{-1} - 1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^n (1+i)^{-n} - 1}$$

Si l'on suppose que la série en cours est composée de r tranches de N titres, on peut supposer que les tranches sont telles que dans chacune d'elles, il y ait en moyenne k titres non placés. Nous supposerons en outre k constant pendant la durée des tirages. L'événement le plus défavorable à la société est celui pour lequel il sort r titres placés, 1 dans chaque série, car alors la probabilité de sortie des titres n'est plus $\frac{1}{N}$, comme la formule de calcul des primes l'indiquait, mais bien $\frac{1}{N-k}$. Si cet écart maxima se produisait dans tous les tirages mensuels successifs, la prime ϖ devrait être augmentée d'une quantité qui sera précisément le chargement de risque.

La partie de la prime correspondant à l'assurance temporaire devrait être augmentée de

$$\left(\frac{1}{N-k} - \frac{1}{N}\right)(1+i)^{-\frac{1}{2}}$$

à chaque tirage ; la partie de la prime relative au capital différé serait légèrement diminuée ; cette diminution est négligeable.

C'est donc l'assurance temporaire seule qui donnera chaque année une perte qui est

$$\frac{12\,k}{N\,(N-k)}\,(1+i)^{-\frac{1}{2}}$$

en admettant le maximum de l'erreur pour tous les tirages pendant la durée totale du contrat.

$(1+i)^{-\frac{1}{2}}$ est égal à 0,98294, c'est-à-dire sensiblement égal à 1 ; l'erreur sur la prime annuelle maxima ou le chargement de risque est

$$\frac{12\,k}{N\,(N-k)}$$

Il n'y a pas lieu de constituer une réserve de risque, puisque le taux de mortalité est constant ; le chargement de risque suffit chaque année à couvrir les écarts de mortalité. Le chargement que nous prévoyons sera le maximum si k, nombre de titres résiliés dans chaque groupe de N titres, est parfaitement déterminé. Les sociétés peuvent prendre pour k une valeur un peu plus élevée que la réalité.

Dans le cas où $N = 3.000$, $k = \frac{N}{3}$, ce qui suppose que le tiers des titres est résilié ou non placé ; au bout d'un certain temps, le chargement de la prime est de :

$$\frac{N}{6} = \frac{12 \times \frac{3.000}{3}}{3.000\left(3.000 - \frac{3.000}{3}\right)} = \frac{2}{1.000}$$

Dans le cas où le capital des titres est de 1.000 francs, on voit qu'il faut charger les primes annuelles de 2 francs.

Si le capital à rembourser n'était que de 500 francs, les primes annuelles ne seraient chargées que de 1 franc.

Ainsi, dans le cas de la combinaison de 15 ans (1.000 francs de capital) à prime mensuelle de 5 francs, où la prime annuelle est sensiblement de 60 francs par an, il faut réserver 2 francs pour le chargement de risque, si la proportion de l'amortissement annuel constant est de $\frac{4}{1.000}$ par an.

Si le taux d'amortissement n'était que de $\frac{2}{1.000}$, il faudrait prendre pour chargement de risque une somme de 1 franc. Cette somme est comprise dans le chargement de gestion g.

On remarquera que ce chargement de risque est une fonction de k et de N ; il varie proportionnellement à k, c'est-à-dire au nombre des titres non placés, inversement proportionnellement à N, ou, ce qui revient au même, proportionnellement au taux de mortalité $\frac{1}{N}$.

Chaque année, et au moment de chaque tirage, une société peut déterminer exactement l'écart sur la mortalité prévue, et par suite le bénéfice ou la perte sur la mortalité des titres. Si son registre d'inscription des contrats est bien tenu, elle détermine exactement le nombre des contrats émis, le nombre des contrats placés, la proportion des titres à amortir à chaque tirage dans l'année considérée. Comme elle connaît, d'autre part, le nombre de titres réellement amortis, elle peut déterminer la perte ou le bénéfice sur l'ensemble des titres, et par suite, pour un titre donné.

Le bénéfice sur un titre s'obtient en retranchant du chargement de risque la perte provenant des tirages défavorables; on suppose que la perte est toujours inférieure à ce chargement.

Si les écarts sont, au contraire, favorables, le bénéfice est égal au chargement de risque augmenté du bénéfice dû à la sous-mortalité.

Si la société attribue les bénéfices de mortalité à ses contractants, on voit que la répartition est immédiate pour chaque contrat et dans chaque catégorie.

Si la loi de mortalité adoptée est la loi de Moivre, il faut alors considérer un chargement spécial pour risque et une réserve de risque, car dans la loi de Moivre, le taux de mortalité croît avec l'âge et il est nécessaire de mettre en réserve une partie du chargement annuel pour risque.

Si l'on suppose que le taux de mortalité du début est $\frac{1}{N}$ et qu'il y ait en moyenne k titres résiliés ou non placés dans chaque groupe de n titres (k constant), l'annuité $a_0^{(n)}$ prend alors la valeur :

$$a_0^{(n)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{(1+i)}{(N-k)\,i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n\,(1 \times i)^{-n-1}\right]$$

on a alors $$a_0^{(n-1)} = a_0^{(n)} - \frac{N-k-n}{N-k}(1+i)^{-n}$$

L'augmentation de la prime unique Π s'écrit :

$$\frac{k}{N\,(N-k)}\left[(1+i)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n\,(1+i)^{-n}\right]$$

On peut calculer aussi directement l'augmentation de la prime annuelle; il suffit de calculer la nouvelle prime annuelle dans le cas où l'on part de N — k titres au milieu de N et de retrancher de cette prime la prime annuelle obtenue dans le cas où l'on part de N titres.

On pourrait calculer directement la prime de risque et les réserves de risque successives en considérant l'assurance de risque comme une assurance temporaire dont les taux de mortalité sont successivement

$$\frac{1}{N-k} \quad \frac{1}{N-k-1} \,. \quad \frac{1}{N-k-2} \quad \frac{1}{N-k-(n-1)}$$

En appliquant les formules qui donnent $a_0^{(n)}$, $a_0^{(n-1)}$ et la formule de l'assurance temporaire :

$$\varpi = \frac{\left[1 - i\,a_0^{(n)} - P_0^{(n)}\right](1+i)^{-\frac{1}{2}}}{1 + a_0^{(n-1)}}$$

on obtiendrait les primes et les réserves de l'assurance de risque.

Mais il est plus simple de ne pas séparer l'assurance de risque de l'assurance de capitalisation et de calculer directement les réserves de la combinaison augmentées de la réserve de risque correspondante. Il suffit pour cela, en calculant les réserves du contrat, de considérer la prime Π et l'annuité $1 + a_0^{(n-1)}$, en tenant compte de la résiliation de k titres. Si l'on calcule la réserve après x années, la prime Π_x sera :

$$\Pi_x = \frac{1}{N - k - x}(1+i)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1-(1+i)^{-(n-x)}}{i} + \frac{N-k-n}{N-k-x}(1+i)^{-(n-x)}$$

l'annuité sera :

$$1 + a_x^{(n-x-1)} = 1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-x)}}{i} - \frac{1+i}{(N-k-x)i}$$
$$\times \left[\frac{1-(1+i)^{-(n-x)}}{i} - (n-x)(1+i)^{-n-x-1}\right]$$
$$- \frac{N-k-n}{N-k-x}(1+i)^{-(n-x)}$$

La réserve $R_x = \Pi_x - \varpi_x \left[1 + a_x^{(n-x-1)}\right]$ sera la réserve augmentée de la réserve de risque.

ϖ_x nouvelle prime annuelle majorée.

Remarque. — Lorsqu'une société emploie la méthode de tirage sur les titres émis avec la loi du taux d'amortissement constant, si elle ne tient pas à assurer un amortissement de titres par âge, elle peut attribuer aux nouveaux titres entrant les numéros restés vacants par suite de résiliation. En opérant ainsi, les différents groupes de N titres seront toujours à peu près complets au moment des tirages et l'écart sur la mortalité des titres sera diminué. La dernière tranche de N titres en cours d'émission, seule, contiendra des titres non placés et sera incomplète.

CHAPITRE VI

Titres dont les primes portent intérêt ou titres obligations
Titres à remboursement croissant en progression arithmétique

Quelques sociétés délivrent des contrats dont les primes portent un intérêt annuel payable à la fin de chaque année tant que les contrats restent en cours.

Si le contrat est à prime unique, les intérêts constituent une annuité payable en fin d'année dont la valeur s'exprime immédiatement.

Dans le cas d'un contrat amortissable suivant la loi de l'exponentielle ($p = 1 - q$, q taux constant d'amortissement) par des tirages ayant lieu en milieu d'année, on sait que l'on a :

$$a_0^{(n)} = p\,(1+i)^{-1}\,\frac{p^n\,(1+i)^{-n} - 1}{p\,(1+i)^{-1} - 1}$$

Si l'intérêt annuel de la prime Π'' (prime commerciale du contrat) est I, l'annuité à payer tant que le titre sera vivant sera évidemment :

$$\mathrm{I}\;a_0^{(n)}$$

Si le contrat stipule un intérêt sur les primes annuelles, ledit intérêt étant payable en fin d'année en cas de vie du titre, la valeur de l'intérêt annuel doit être évaluée au moyen d'une annuité en progression arithmétique. En posant $v = p\,(1+i)^{-1}$ (cas de la loi de l'exponentielle) cette annuité s'écrit :

$$a^{(n)} = v + 2\,v^2 + 3\,v^3 \;\ldots + n\,v^n = \frac{1}{v-1}\left[n\,v^{n+1} - v\,\frac{v^n - 1}{v-1}\right]$$

L'annuité payable d'avance étant

$$1 + a_0^{(n-1)} = \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

la prime supplémentaire annuelle à payer sur un titre-obligation est :

$$\mathrm{I}\,\frac{a^{(n)}}{1 + a_0^{(n-1)}} \qquad \text{ou } \varpi,\, \mathrm{I} = \left[\frac{n\,v^{n+1}}{v^n - 1} - \frac{v}{v-1}\right]\mathrm{I}$$

Pour évaluer la réserve d'un titre-obligation, on peut employer la méthode de récurrence.

Régime du contrat à prime unique après k années :

$$S_k = \frac{S_{k-1}(1+i) - q(1+i)^{\frac{1}{2}}}{p} - I$$

(réserve après paiement du coupon annuel).

Dans le cas de la prime annuelle, on a la formule :

$$S_k = \frac{(S_{k-1} + \varpi)(1+i) - q(1+i)^{\frac{1}{2}}}{p} - nI$$

réserve après paiement du coupon annuel.

Un titre-obligation pratiquement réalisable par les sociétés de capitalisation serait le suivant : Titre amortissable au capital de 1.000 francs en 15 ans, primes mensuelles de 6 francs par mois pendant 15 ans, amortissement annuel de $\frac{1}{1000}$, paiement en fin d'année d'un coupon de 2 1/2 °/₀ de la prime annuelle fractionnée, c'est-à-dire d'un coupon de 1 fr. 80.

Les primes du contrat pourraient être calculées par les formules en commutation suivantes :

$$\Pi = \frac{(N_0 - N_{15})(1+i)^{-\frac{1}{2}} - (N_1 - N_{16})(1+i)^{\frac{1}{2}} + D_{15} + 1{,}80(S_1 - S_{16} - 15N_{16})}{D_0}$$

$$\varpi = \frac{\Pi}{N_0 - N_{15}} \qquad D_x = (0{,}999)^x (1+i)^{-x} \qquad N_x = \Sigma D_x$$

$$D_0 = 1 \qquad S_x = \Sigma N_x$$

On remarquera que la quantité $S_1 - S_{16} - 15\,N_{16}$ représente, comme dans la théorie des assurances sur la vie, la valeur d'une annuité en progression arithmétique.

Titres dont le remboursement varie en progression arithmétique. — On peut imaginer un titre dont le remboursement est égal au capital C la première année, $C + \frac{C}{k}$ la deuxième année, $C + \frac{2C}{k}$ la troisième année, ..., $C + \frac{nC}{k}$ à la fin de la n^e année.

La prime unique du contrat s'écrira donc :

$$\Pi = q(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[C + \left(C + \frac{C}{k}\right)p(1+i)^{-1} + \left(C + \frac{2C}{k}\right)p^2(1+i)^{-2} + \ldots + \left(C + \frac{(n-1)C}{k}\right)p^{n-1}(1+i)^{-(n-1)}\right] + \left(C + \frac{nC}{k}\right)p^n(1+i)^{-n}$$

dans le cas où le taux d'amortissement q est constant et où les tirages ont lieu en milieu d'année.

La prime unique Π s'obtient donc en ajoutant à la prime unique Π du contrat remboursable au capital C à tous les tirages, la quantité :

$$\Pi' = Cq\,(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{k}p\,(1+i)^{-1} + \frac{2}{k}p^2\,(1+i)^{-2} + \ldots + \frac{n-1}{k}\,p^{n-1}\,(1+i)^{-(n-1)}\right] + \frac{n}{k}\,p^n\,(1+i)^{-n} \times C$$

$$\Pi' = \frac{C}{k}\,q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[v + 2v^2 + 3v^3 + \ldots + (n-1)\,v^{n-1}\right] + nv^n \times \frac{C}{k}$$

La quantité entre crochets est égale à

$$\left[v\,\frac{v^{n-1}-1}{v-1} - (n-1)\,v^n\right]\frac{1}{v-1}$$

La prime annuelle se calculerait par la division de Π par l'annuité

$$1 + a_0^{(n-1)} = \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

Les réserves du contrat à prime annuelle se calculeraient facilement par la méthode de récurrence :

$$S_k = \frac{(S_{k-1} + \varpi)\,(1+i) - q\,(1+i)^{\frac{1}{2}}\left[C + \frac{(n-1)C}{k}\right]}{p}$$

Les titres dont les primes annuelles portent intérêt progressif ou dont la valeur de remboursement augmente chaque année, se rangent naturellement en séries d'âge annuelles.

L'amortissement doit donc s'opérer sur chaque série d'âge annuelle suivant les proportions déterminées par les formules.

Pour ces titres, il est donc indiqué d'employer la méthode de tirage sur les titres en cours en les rangeant par séries d'âge.

CONCLUSIONS DE L'ÉTUDE ACTUARIELLE

Il est préférable, croyons-nous, d'employer la méthode de tirage sur les titres en cours en rangeant les titres par séries d'âge. Il y a peut-être quelques difficultés pour connaître exactement les titres en cours au moment d'un tirage donné ; cependant les sociétés sont tenues de tenir constamment à jour le registre des contrats ; ce travail de détermination des titres en cours est donc quotidien et, semble-t-il, constamment à jour. Ordinairement, les titres qui n'ont pas payé l'avant-dernière prime mensuelle n'ont pas droit de participer au tirage. Il suffit de pointer ces titres dans chaque série pour reconnaître ceux qui peuvent participer aux tirages.

On peut employer la loi de Moivre avec la méthode de tirage sur les titres en cours ; elle s'adapte bien au tirage en séries. Au début d'une société, on pourra tirer une fois par an, puis, quand la production s'élèvera, une fois par trimestre, puis une fois par mois, quand la production sera considérable. De cette façon, les séries ne comprendront pas des nombres trop considérables de titres et l'amortissement se fera régulièrement sur chaque série au fur et à mesure qu'elle vieillira.

La plupart des sociétés emploient au contraire la méthode des titres en cours avec la loi de l'exponentielle et elles tirent sur l'ensemble des titres sans les ranger en séries. Ce procédé à l'inconvénient de ne pas assurer l'amortissement régulier par âge. On peut répondre cependant qu'à fractionner par séries, on crée plus de restes et qu'on amortit moins de titres dans une année donnée. Mais en reportant les restes, l'amortissement finit par se faire complètement, quoique plus tard.

Si le nombre des titres en cours est considérable, le tirage est difficile. M. Goury (*Bulletin de l'Institut des Actuaires, n° 77*) a proposé un procédé de tirage qui facilite les opérations. On range les titres en séries (séries indépendantes de l'âge), séries de 1000 titres si l'on tire un sur mille, sans tenir compte des titres résiliés ou rachetés ; puis, au moyen de deux roues on tire deux numéros dont l'un est le numéro de la série, l'autre le numéro du titre à amortir compris dans la série. Si le numéro désigné existe, on a un titre à amortir. Si le numéro désigné est résilié, on recommence le tirage d'une série et d'un titre de la série à chaque fois.

Beaucoup de sociétés préfèrent employer la méthode de tirage sur les titres émis qui donne beaucoup moins de travail pour la prépa-

ration des tirages. Il n'est pas besoin de vérifier les titres en cours avant le tirage et tous les titres aussitôt émis participent au tirage. Toutes les sociétés emploient le tirage sur les titres émis avec la loi de Moivre. Nous avons vu les inconvénients de l'emploi de cette loi : changement de base des tirages, limitation de la durée d'émission des séries, inégalité entre les titres. C'est au contraire la loi de l'exponentielle qu'elles devraient employer puisque les inconvénients cités plus haut disparaissent.

Les tirages seraient du reste facilités et pourraient s'opérer avec une seule roue contenant le nombre N de base. On pourrait opérer aussi avec une ou plusieurs roues portant des chiffres ordinaires. Le tirage est très facile puisque les numéros tirés sont remis en roue.

La loi de l'exponentielle se prête, à cause du taux de mortalité constant, à un calcul facile des écarts de mortalité et du bénéfice ou de la perte annuelle de mortalité.

Pour toutes ces raisons, les sociétés devraient donc employer la loi de l'exponentielle avec la méthode de tirage sur les titres émis.

Dans le cas où les sociétés ne font de tirages anticipés qu'au moyen des bénéfices annuels, il est tout indiqué de ranger les titres par séries d'age et de répartir les bénéfices entre les séries, puis d'effectuer les tirages sur chaque série en reportant les restes correspondant aux fractions de titres qui ne sont pas amortissables.

En opérant la répartition des bénéfices de placement, les séries plus âgées obtiennent une part plus grande et leur amortissement augmente avec l'âge. La loi de mortalité des titres avec l'âge prend des taux de mortalité plus élevés. Les titres rangés dans les séries ont même réserve mathématique, mêmes frais d'acquisition non amortis, même coefficient de repartition pour les divers bénéfices ; la répartition entre les diverses séries est donc très rapide.

ÉTUDE JURIDIQUE

Législation (Loi du 19 décembre 1907)

La loi du 19 décembre 1907 sur les sociétés de capitalisation a introduit en France une importante dérogation à la loi de 1836 sur les loteries. Elle a permis des remboursements anticipés par voie de tirage au sort. Le contractant, qui est remboursé après le paiement de quelques primes mensuelles, ou même quelquefois après le paiement d'une seule prime mensuelle, a un avantage considérable sur celui qui n'est remboursé qu'à la fin du contrat. Mais la loi de 1907 a apporté des tempéraments à la loterie en limitant la valeur des remboursements ; elle a spécifié nettement, à l'article 4, § 8, que pour tous les souscripteurs d'une même série, le remboursement comporte soit des sommes égales, soit des sommes croissant avec les tirages successifs, sans que le dernier remboursement puisse excéder le double du premier. Il n'y a donc pas à vraiment parler de lots, c'est-à-dire de valeurs de remboursement d'importance exagérée par rapport aux sommes versées par les souscripteurs. Les souscripteurs favorisés touchent seulement beaucoup plus tôt que les autres la somme garantie par le contrat. Une dérogation du même ordre existait déjà en 1907 avec les émissions d'obligations que toutes les sociétés anonymes ou mutuelles, commerciales ou civiles, émettaient et amortissaient ensuite par tirages au sort et par anticipation. Malgré cela, les tribunaux français ont considéré, jusque vers 1885, les sociétés de capitalisation comme des loteries. Même aujourd'hui, les tribunaux belges condamnent ces sociétés comme pratiquant la loterie. La loi de 1907 a reconnu la légalité des sociétés de capitalisation en même temps qu'elle leur a permis les remboursements anticipés par voie de tirage au sort. Elle a également limité la durée de la loterie à 33 ans ; d'après l'article 4 de la loi, en effet, la durée des opérations comportant remboursements anticipés par voie de tirage au sort ou autrement ne peut jamais excéder trente-trois ans. Sage mesure, car trop souvent avant la loi, les sociétés pratiquèrent des opérations de très longue durée qui n'étaient, au regard de leurs contractants, que de pures loteries.

Définition des sociétés de capitalisation. — Quelles sont les sociétés assujetties à la loi de 1907.

Les sociétés de capitalisation sont définies par l'article 1 de la loi : ce sont celles qui font appel à l'épargne en vue de la capitali-

sation et contractent des engagements déterminés. Il faut donc trois conditions pour qu'une société de prévoyance soit une société de capitalisation.

La première condition: faire appel à l'épargne, ne permet pas évidemment de distinguer une société de capitalisation d'une société d'épargne ou de prévoyance, ou même d'une société de secours mutuels ou d'assurances sur la vie. Comme toutes ces sociétés, la société de capitalisation doit faire appel à l'épargne. Il nous semble qu'il eût été nécessaire de dire : faire appel public à l'épargne. C'est parce que les sociétés s'adressent à l'épargne publique qu'il est nécessaire de les réglementer ; une société qui se bornerait à recueillir l'épargne de quelques membres se connaissant entre eux et dans un cercle restreint et à la faire fructifier, puis à la répartir entre eux n'étant pas un danger pour l'épargne publique n'aurait pas de raison d'être régie par une législation spéciale.

La deuxième condition : la capitalisation des versements, n'est pas non plus absolument caractéristique des opérations pratiquées par les sociétés de capitalisation ; les opérations d'épargne et tous les placements effectués par les sociétés financières, les émissions d'obligations sont des opérations de capitalisation. Il est vrai que les sociétés financières qui effectuent des placements ou émettent des obligations poursuivent un autre but social que celui de rembourser des sommes déterminées aux souscripteurs de leurs émissions ; elles ont un but commercial distinct.

La troisième condition : prend des engagements déterminés, est peu nette ; elle a, du reste, été critiquée récemment au Parlement. Le législateur, de l'avis de tous, a voulu dire : engagement de payer une somme déterminée. C'est la somme à payer par contrat qui est garantie et déterminée, et non les engagements du contrat qui doivent toujours être déterminés.

Cette troisième condition permet de distinguer nettement les sociétés de capitalisation des sociétés d'épargne qui réalisent aussi des opérations de capitalisation, mais qui ne prennent pas l'engagement de payer une somme déterminée.

Nature du contrat de capitalisation

Quelle est la nature du contrat qui lie les sociétés de capitalisation à leurs adhérents ? Pour trouver la définition de ce contrat, il suffit de se reporter à deux arrêts de la Cour de Cassation du 17 août 1869. D'après ces arrêts, les titres délivrés par une société de capitalisation sont des contrats individuels dont la valeur varie avec le jour où ils ont été passés, alors que les titres négociables en Bourse sont des titres émis dans les mêmes conditions et de valeur égale. Les

sociétés de capitalisation ne font pas de contrats de prêts avec leurs clients : elles reçoivent des fonds avec mandat de les faire fructifier. Le contrat de capitalisation tient donc à la fois du dépôt, du mandat et de l'association.

Les titres de capitalisation ne sont donc pas des obligations offertes au public par fractions égales et procurant des droits identiques à tous les souscripteurs, car dans chaque catégorie de titres la valeur de négociation varierait suivant l'échéance, suivant le montant des versements et la date de souscription.

La Chambre civile de la Cour de Cassation a rendu un nouvel arrêt le 7 mai 1912 qui a décidé que l'article 27 de la loi de 1850 ne soumettait au droit de timbre de 1 °/₀ que les titres cotés en Bourse ou susceptibles de l'être, c'est-à-dire les obligations émises en représentation d'emprunts d'une somme déterminée, offertes au public par fractions égales. Par suite, les titres émis par les sociétés de capitalisation, dont le but exclusif est de favoriser l'épargne par la constitution et la reconstitution de capitaux, ne constituent pas des valeurs publiques au sens de l'article 27 de la loi de 1850, et par conséquent, ne sont pas soumis au droit de timbre de 1 °/₀, ni au droit de transmission.

D'après la jurisprudence de la Cour de Cassation, les contrats de capitalisation sont donc des comptes de dépôt. Chaque contractant dépose des sommes que les sociétés gèrent et font fructifier par l'association des différents comptes. Aussi, certaines sociétés appellent-elles les contrats des comptes d'épargne. C'est bien, en effet, des comptes qu'elles ouvrent à leurs déposants et qu'elles ont mandat de gérer.

A sa souscription, le titre de capitalisation a donc une valeur nulle, il n'a pas de valeur d'émission. Il est donc essentiellement différent de l'obligation qui a une valeur déterminée. La valeur du titre de capitalisation va en croissant avec l'âge en partant de zéro pour arriver à la valeur du capital à reconstituer, tandis que l'obligation varie ordinairement peu de son prix d'émission à sa valeur nominale.

Le titre de capitalisation n'a donc d'existence qu'après sa souscription, quand le compte du déposant est ouvert. Il offre beaucoup d'analogie avec le contrat d'assurance sur la vie souscrit sur la tête d'un assuré et qui prend naissance par le paiement de la première prime. En cas de sortie du numéro du titre de capitalisation au tirage d'amortissement, le capital souscrit se trouve immédiatement constitué ; il en est de même en cas de mort de la tête assurée par le contrat d'assurance. La société d'assurance, comme la société de capitalisation, reçoit des dépôts de fonds qu'elle fait fructifier et dont elle constitue des capitaux.

L'analogie est complète entre le contrat de capitalisation et le contrat d'assurance mixte réalisé par les sociétés d'assurances sur la vie. On pourrait continuer la comparaison de ces contrats au point de vue du paiement des primes, de la résiliation, du rachat, de la réduction, de l'existence de la réserve mathématique du contrat.

Le contrat de capitalisation se constate également par la rédaction d'une police. Il peut être nominatif ou au porteur. Le contrat peut être transmis par endossement comme les polices d'assurances sur la vie.

Malgré la netteté et la précision apportées par la Cour de Cassation dans sa définition du contrat de capitalisation, il est quelquefois difficile dans la pratique de distinguer ce contrat de l'obligation, car il a été créé récemment des types d'obligations qui offrent au premier abord une analogie presque complète avec le bon de capitalisation.

L'obligation libérable par un grand nombre de versements échelonnés sur plusieurs années et ne comportant pas de paiements d'intérêts annuels diffère peu du bon de capitalisation. Cependant, à l'examen, plusieurs différences essentielles sont immédiates : le souscripteur d'une obligation doit payer obligatoirement tous les versements successifs, tandis que le souscripteur du bon peut cesser à son gré les versements et toucher une valeur de rachat ou toucher au terme du contrat une valeur réduite; l'obligation n'a ni valeur de rachat, ni valeur réduite. Elle ne peut qu'être vendue à son cours de bourse.

L'amortissement des obligations (ordinairement remboursables par annuité constante) diffère tout à fait de l'amortissement des titres de capitalisation. Les versements sur obligations ne comportent pas de chargement, ces versements ne sont pas des primes. Au contraire, les primes du contrat de capitalisation comportent un chargement minimum de 10 % de leur valeur.

Mais si les obligations étaient émises avec prime au-dessus de la valeur nominale, la société émettrice aurait, en fait, pris un chargement. Dans ce cas, l'obligation donnerait alors droit à un intérêt annuel, ce qui la différencierait du bon de capitalisation.

Certaines sociétés de capitalisation ont émis des titres-obligations donnant droit à un intérêt annuel sur les primes payées, ou à un intérêt annuel sur la prime unique du contrat. Ces titres offrent encore plus d'analogie avec les obligations, mais les différences signalées plus haut subsistent.

Les placements à intérêts composés, que certaines sociétés d'assurances pratiquaient autrefois, avant la loi du 17 mars 1905, et que certaines banques pourraient pratiquer aujourd'hui, sont aussi, évidemment, des opérations qui rentrent dans le domaine d'application

de la loi du 19 décembre 1907. Il y a bien reconstitution de capitaux ou capitalisation, engagements déterminés, appel à l'épargne. La seule différence avec les opérations de capitalisation ordinaires, c'est qu'il n'y a pas de remboursement par anticipation et par tirage au sort.

Enregistrement des sociétés de capitalisation

Ces sociétés, comme les sociétés d'assurances sur la vie ou les sociétés tontinières, sont assujetties à la formalité de l'enregistrement. Elles doivent déposer leurs statuts, leurs tarifs et leurs tableaux d'amortissement, notes techniques exposant le mode d'établissement des tarifs et tableaux d'amortissement. Toute modification aux statuts et aux tarifs doit être également enregistrée.

Le refus d'enregistrement ne peut être prononcé que pour infraction aux lois qui régissent les sociétés, ou infraction à la loi du 19 décembre 1907.

L'administration qui donne l'enregistrement ne fait donc que constater que la société fonctionne conformément aux lois. Elle ne pourrait donc refuser l'enregistrement s'il n'y avait aucune infraction aux lois.

Garanties spéciales édictées par la loi dans son Titre II relativement aux contrats et à la publicité des opérations

La loi a imposé aux entreprises certaines garanties relatives aux contrats. Tandis que la loi de 1905 a laissé aux sociétés d'assurances sur la vie toute liberté relativement à l'établissement des contrats, la loi de 1907 a imposé, au contraire :

1° L'interdiction de percevoir, sous quelque forme que ce soit, des droits d'entrée ;

2° La limitation des sommes à prélever pour frais de gestion en proportion des versements ;

3° La quotité maximum que peuvent atteindre, le cas échéant, les retenues en cas de déchéance eu égard au montant et à la durée des versements effectués ;

4° La durée maxima de la capitalisation, pour les diverses catégories de contrats, sans que cette durée puisse excéder 50 ans. Dans le cas de remboursement par anticipation, la durée maxima des contrats est de 33 ans.

Ces dispositions doivent être indiquées dans les statuts et les contrats, de sorte que les contractants sachent quelle est la limite maxima des frais de gestion que les sociétés s'engagent à ne pas dépasser, ou la quotité maxima que peuvent atteindre les pertes sur les versements en cas de résiliation ou de réduction des contrats.

Mais on peut dire que ces deux dernières dispositions sont sans portée, car les sociétés ne sont tenues que d'indiquer des maxima qu'elles n'atteignent jamais en fait. Chaque société, lorsqu'elle établit une combinaison, fixe des frais de gestion qui servent à déterminer les primes brutes des combinaisons en partant des primes pures, établit également des valeurs de rachat et de réduction pour chaque durée écoulée et pour chaque combinaison.

Les indemnités retenues en réalité sont toujours inférieures aux maxima prévus par les sociétés dans leurs statuts.

Les sociétés doivent également spécifier dans leurs statuts et leurs contrats :

1° Les conditions de déchéance opposables aux souscripteurs pour retard dans les versements, sans que ces déchéances puissent avoir d'effet avant un délai d'un mois à dater du jour de l'échéance. Dans le cas où le contrat est nominatif, le délai ne court qu'à partir d'une mise en demeure par lettre recommandée ;

2° La substitution de plein droit de tous les héritiers des titulaires de contrats nominatifs aux titulaires, ainsi que l'interdiction pour l'entreprise de stipuler à leur décès aucun versement supplémentaire ou aucune retenue spéciale.

La première disposition a pour but d'empêcher les sociétés de multiplier les clauses de déchéance ou d'appliquer des délais de déchéance extrêmement courts. La deuxième caractérise les opérations de capitalisation qui doivent être indépendantes de la vie humaine ; elle permet aux héritiers des contractants de continuer les contrats sans que le décès de leurs ascendants puisse modifier les conditions de ces contrats.

La loi a, en outre, imposé aux sociétés une certaine publicité de leurs opérations. Elles doivent indiquer dans les statuts et les contrats les conditions de publicité dans lesquelles doivent avoir lieu les tirages au sort pour l'amortissement anticipé des contrats. Tout souscripteur de contrat, ou tout porteur, a droit, après chaque tirage, sur sa demande, à la délivrance gratuite de la liste intégrale des titres sortis dans les séries qui l'intéressent et non encore remboursés.

Garanties spéciales relatives au capital social et au fonds de premier établissement des sociétés

Les sociétés anonymes ou en commandite doivent avoir un capital social au moins égal à un million divisé en actions nominatives ne pouvant être libérées de plus de moitié. Elles doivent stipuler dans leurs statuts leur dissolution obligatoire en cas de perte de la moitié du capital social.

La loi, en empêchant de libérer les actions de plus de moitié, a voulu éviter la disparition complète de toute garantie des opérations sociales au moment de la faillite ou de la liquidation d'une société ; la moitié du capital restant à appeler peut couvrir les déficits, les insuffisances des réserves mathématiques, les moins-values sur les placements. Il y a lieu de croire qu'en général, une somme de 500.000 francs sera suffisante pour couvrir les déficits avoués ou ignorés d'une société anonyme de capitalisation, si cependant les frais de premier établissement et le compte de commissions escomptées figurant à l'actif de cette société ne sont pas trop élevés. Mais les frais de premier établissement peuvent atteindre le quart du capital social, aux termes du décret du 1er avril 1908 ; les commissions escomptées peuvent également atteindre le quart du capital social, et si la société en a en outre un solde débiteur égal à la moitié du capital, celui-ci se trouve entièrement absorbé. Dans ce cas, qui semble extrême, le capital serait insuffisant à couvrir les pertes sociales.

Il y aurait plus de sécurité si la loi avait prévu un amortissement plus rapide des frais de premier établissement ou un maximum plus faible de ces frais, si, de même, elle avait prévu un amortissement régulier des commissions escomptées.

Les sociétés françaises à forme mutuelle doivent constituer un fonds de premier établissement qui ne peut être inférieur à 50.000 francs et qui doit être amorti en 15 ans au plus. Elles doivent déterminer dans leurs statuts le mode de règlement et l'emploi des sommes perçues. Il ne leur est imposé aucun fonds spécial de garantie analogue au capital social des sociétés anonymes. Le fonds de premier établissement fait l'avance des frais de premier établissement ; il peut n'être que de 50.000 francs et pourra alors être absorbé très rapidement. Il n'y aura plus aucun capital pour faire face aux déficits de gestion et aux commissions escomptées qui peuvent être aussi élevés que dans une société anonyme. La loi aurait dû imposer un fonds spécial de garantie destiné à couvrir les déficits de gestion. Ce fonds amortissable, analogue au fonds temporaire de garantie des mutuelles d'assurances sur la vie, pourrait être constitué par les sociétés dans certaines conditions à prévoir par leurs statuts. La durée de l'amortissement pourrait être très longue, plus longue que la durée d'amortissement des frais de premier établissement. L'amortissement pourrait aussi se faire d'une quantité égale à l'accroissement annuel de la réserve de garantie.

Le législateur a peut-être estimé très faibles les frais de gestion des mutuelles de capitalisation, et il semble qu'il n'ait pas prévu que certaines sociétés emploieraient des méthodes de tirages donnant

lieu à une mortalité des titres analogue à la mortalité des assurés dans les sociétés d'assurances sur la vie et pouvant donner lieu, par conséquent, à des pertes de mortalité.

Quant aux frais de gestion, ils sont aussi élevés proportionnellement à l'importance des contrats que dans une société d'assurances sur la vie, et, dans certaines combinaisons imposées par la nature des choses, les chargements ne dépassent guère 10 à 12 °/₀ des primes, ce qui entraîne des déficits inévitables au début des entreprises.

Garanties imposées relativement à la constitution

des réserves mathématiques et de la réserve de garantie

D'après le décret du 1er avril 1908, les réserves mathématiques ne peuvent être inférieures à celles qui résulteraient des engagements respectifs des contractants évalués au moyen de versements ou cotisations purs calculés en prenant pour base le taux d'intérêt de 3,5 °/₀. Ce texte, semble-t-il, ne définit pas suffisamment la méthode de calcul des réserves mathématiques, car si l'engagement de la société évalué par une prime pure unique est nettement déterminé d'année en année, l'engagement de l'assuré pourrait être évalué par l'emploi d'une prime variable d'année en année et permettant cependant de reconstituer le capital assuré en fin de contrat. Le texte permettrait donc d'employer des méthodes de calcul des réserves analogues à la méthode de Zillmer en assurances sur la vie, donnant au début des contrats des réserves inférieures à celles qui résulteraient de l'emploi d'une prime pure constante pour l'évaluation de l'engagement de l'assuré. Il n'est pas prévu de chargement de gestion spécial ni de réserves à la prime d'inventaire ; cependant, dans le cas où la durée de paiement des primes est inférieure à la durée de reconstitution des capitaux, ou dans le cas des contrats à prime unique, il serait nécessaire de mettre en réserve une partie des frais de gestion payés au début des contrats. Dans le même ordre d'idées, il eût été désirable que la loi ait imposé aux sociétés qui remboursent les contrats par tirages au sort sur les bénéfices annuels, l'établissement d'une réserve spéciale pour amortissement des contrats. Qu'arrive-t-il, en effet, dans ces sociétés lorsque le paiement des primes est effectué par une prime unique, ou par le paiement de quelques primes annuelles ? C'est qu'elles dépensent entièrement les bénéfices des premières années (qui existent tant que les adhérents paient les primes) en effectuant des tirages anticipés, et qu'elles cessent ensuite tout tirage jusqu'à l'expiration des contrats. De sorte que certains adhérents, les premiers, seuls sont favorisés au détriment de ceux qui viennent ensuite. On peut répondre que les

sociétés qui amortissent les contrats au moyen des bénéfices ne s'engagent qu'au paiement du capital en fin de période, et qu'elles tiennent après tout leurs engagements. Mais il serait souhaitable que la loi intervînt cependant pour protéger les contractants dans ce cas, comme elle est intervenue pour réglementer les contrats de capitalisation.

Dans cet ordre d'idées, si la loi intervenait, il lui faudrait obliger les entreprises à fixer un chargement spécial pour amortissement et un chargement spécial pour gestion. Le calcul des réserves tiendrait compte de l'amortissement et de la gestion des contrats après le paiement des primes.

Les sociétés de capitalisation anonymes ou en commandite sont en outre astreintes à constituer une réserve de garantie par le prélèvement annuel sur leurs encaissements d'une somme au moins égale à 3 °/₀₀ des cotisations uniques et périodiques encaissées dans l'exercice. Le prélèvement peut être réduit de moitié lorsque la réserve de garantie atteint 5 °/₀ des réserves mathématiques ; il cesse d'être obligatoire lorsque cette réserve atteint 10 °/₀ des réserves mathématiques.

Les sociétés à forme mutuelle et les entreprises étrangères, pour les contrats souscrits en France et en Algérie, sont également assujetties à une disposition analogue, mais le prélèvement n'est réduit de moitié que lorsque la réserve de garantie atteint 6 °/₀ des réserves mathématiques. La réserve de garantie ainsi imposée par la loi est très faible et il est facile de calculer que pour un contrat ordinaire il faut environ trente ans pour que le prélèvement formant la réserve de garantie puisse atteindre 5 °/₀ des réserves mathématiques.

Garantie relative à la rectification du taux des placements

Les sociétés doivent produire annuellement au Ministre du Travail la comparaison entre le taux de leurs placements et celui qui a été admis pour le calcul de leurs réserves mathématiques et de leurs tarifs. En cas d'écarts notables ou répétés, des arrêtés ministériels peuvent exiger, au plus tous les cinq ans, une rectification des bases des réserves mathématiques des opérations en cours, ainsi que des tarifs.

Garanties résultant de l'inscription d'un privilège sur l'actif des entreprises

Jusqu'à concurrence du montant de la réserve de garantie et des réserves mathématiques, l'actif des entreprises françaises est affecté au règlement de leurs opérations par un privilège qui prend rang après le paragraphe 6 de l'article 2101 du Code civil.

Pour les entreprises étrangères, les valeurs représentant la portion d'actif correspondante doivent, à l'exception des immeubles, faire l'objet d'un dépôt à la Caisse des dépôts et consignations. Le seul fait du dépôt confère privilège aux intéressés sur lesdites valeurs pour les contrats souscrits en France et en Algérie.

Il est à remarquer que la portion d'actif correspondant aux bénéfices à répartir aux assurés n'est pas comprise dans le privilège. Cependant les sociétés attribuent et conservent les bénéfices de leurs adhérents.

Il est à remarquer également pour les sociétés étrangères que seules les valeurs déposées sont affectées du privilège. Par conséquent, les immeubles, les prêts sur contrats, qui peuvent former la plus grosse partie de leur actif, ne sont pas affectés du privilège de l'article 7 de la loi.

Garanties relatives aux placements de l'actif des entreprises

Un règlement d'administration publique du 17 juillet 1908, prévu par l'article 8 de la loi, a déterminé les biens mobiliers et immobiliers en lesquels sera effectué le placement de l'actif des entreprises, ainsi que le mode d'évaluation annuelle des différentes catégories de placements, et les garanties à présenter pour les valeurs qui ne pourraient avoir la forme nominative. Le décret rendu a renvoyé aux prescriptions du décret du 9 juin 1906 relatif aux sociétés d'assurances sur la vie.

Il a toutefois ajouté aux placements prévus par le décret du 9 juin 1906 les prêts effectués dans les conditions de la loi du 6 ventôse an XIII. Leur montant ne peut dépasser 15 °/₀ de l'actif total et doit être compris dans le 1/4 des placements formé des valeurs de toute nature prévues au paragraphe 3 de l'article 1 du décret du 9 juin 1906.

Garanties relatives à la détermination du maximum des dépenses de premier établissement et du délai d'amortissement des dites dépenses

La loi a fixé, dans son article 5, le montant du fonds de premier établissement des mutuelles, qui ne peut être inférieur à 50.000 fr. Elle a renvoyé au décret du 1er avril 1908 pour la fixation du maximum des dépenses de premier établissement.

Les dépenses sont limitées au quart du capital social pour les sociétés anonymes et à la quotité du fonds de premier établissement pour les sociétés mutuelles.

Elles doivent être amorties en quinze ans à partir de l'enregistrement.

On remarquera que le fonds de premier établissement des mutuelles doit être également amorti en quinze ans, corrélativement à l'amortissement des frais qui s'effectue en même temps et parallèlement par un simple jeu d'écritures.

Surveillance et contrôle (Titre III de la loi)

La loi du 19 décembre 1907 a également organisé la surveillance et le contrôle des sociétés de capitalisation. Elle a prévu un Comité consultatif qui n'est autre que le Comité consultatif des sociétés d'assurances sur la vie, auquel sont adjoints deux membres pris parmi les administrateurs ou directeurs d'entreprises de capitalisation.

Il doit être consulté au sujet des demandes d'enregistrement des entreprises. Il éclaire le Ministre sur les questions soulevées par l'application de la loi.

Les entreprises sont soumises à la surveillance de commissaires-contrôleurs assermentés qui peuvent, à toute époque, vérifier sur place toutes les opérations, et qui exercent ainsi le contrôle des sociétés au siège.

Le Ministre exerce, d'autre part, un contrôle sur pièces, en exigeant de toutes les entreprises : 1° de publier un compte-rendu annuel de leurs opérations avec états et tableaux annexés, dont le modèle est déterminé par des arrêtés spéciaux ; 2° de lui communiquer à toute époque et dans les formes et délais qu'il détermine tous les documents et éclaircissements qui lui paraissent nécessaires.

Les entreprises doivent, en outre, produire leur compte-rendu au Ministre du Travail, le déposer aux greffes des tribunaux civils et des tribunaux de commerce du département de la Seine et du siège social, le délivrer à tout souscripteur qui le demandera, moyennant le paiement d'une somme qui ne peut dépasser 1 franc.

Les entreprises étrangères, étant donnée leur situation spéciale, doivent avoir en France un siège spécial et une comptabilité spéciale pour les opérations réalisées en France et en Algérie.

Elles doivent accréditer auprès du Ministre du Travail un agent préposé à la direction des affaires françaises. Cet agent doit être domicilié en France. Il représente seul auprès du Ministre l'entreprise étrangère, et il signe seul les polices, bons, quittances et autres pièces relatives aux opérations réalisées.

La surveillance et le contrôle sont enfin complétés, couronnés par la publication d'un rapport annuel au Président de la République établissant la situation de toutes les entreprises assujetties à la loi de 1907, et examinant le fonctionnement de la loi au regard de ces entreprises.

Pénalités prévues par la loi (Titre IV)

La loi prévoit des pénalités applicables aux Sociétés qui contreviennent aux prescriptions légales, qui fonctionnent avant d'avoir été enregistrées, ou qui, dans leurs documents, font des déclarations ou dissimulations frauduleuses. La pénalité dernière, le retrait d'enregistrement peut être prononcé par le Ministre, après avis du Comité consultatif, lorsqu'il est constaté que l'entreprise ne fonctionne plus en conformité de ses statuts, ou de la loi et des décrets ou arrêtés qu'elle prévoit. Le retrait d'enregistrement est prononcé par décret.

Dispositions transitoires (Titre V)

Parmi les dispositions transitoires, il faut en signaler deux de la plus haute importance : 1° celle qui prévoit qu'un arrêté ministériel fixera pour chaque entreprise les bases du calcul des réserves mathématiques des contrats réalisés avant l'enregistrement ; 2° celle qui impose aux entreprises l'établissement d'une comptabilité spéciale pour les contrats antérieurs à l'enregistrement. Cette dernière disposition est exprimée par la loi d'une manière assez singulière ; il est dit, en effet, dans le texte de la loi : Le passif et l'actif correspondant à l'exécution des contrats souscrits avant l'entrée en vigueur de la loi font l'objet d'une comptabilité spéciale. Il serait difficile d'appliquer à la lettre cette disposition, car il faudrait établir deux bilans distincts pour une même Société, ce qui est impossible. Nous croyons que la loi a voulu dire simplement qu'il est nécessaire d'établir des comptes de catégories et un compte de profits et pertes distincts pour les contrats antérieurs à la loi. Il faut signaler aussi que pour les contrats antérieurs à l'expiration d'un délai de 50 ans à compter de la promulgation de la loi, ou d'un délai de 25 ans, si les titres sont amortissables à époque aléatoire, tout souscripteur ou porteur aura droit au remboursement immédiat du montant de la réserve mathématique de son contrat, à condition qu'il use de son droit dans l'année qui suivra l'expiration des délais précédents.

La loi a probablement voulu dire que le délai de 25 ans s'applique aux contrats amortissables par tirages garantis, tandis que le délai de 50 ans s'applique aux contrats amortissables sur les bénéfices, mais pour lesquels le remboursement n'est garanti qu'en fin de contrat.

Entreprises de gestion

La loi de 1907, comme la loi de 1905 sur les assurances sur la vie, a prévu que les sociétés mutuelles pourraient être gérées par des

entreprises de gestion. Ces entreprises doivent également déposer à la Caisse des dépôts et consignations un capital de garantie de 100.000 francs. Elles ne peuvent se faire attribuer la gestion pour une période initiale de plus de 20 ans, à l'expiration de laquelle leur mandat ne pourra être renouvelé pour des périodes de plus de dix ans.

Un décret du 1er avril 1908 a précisé les conditions de fonctionnement des entreprises de gestion des sociétés de capitalisation. Toute entreprise qui se fait attribuer la gestion d'opérations de capitalisation fonctionne sous la responsabilité de l'entreprise qu'elle gère. Elle ne peut fonctionner qu'après avoir produit au Ministre du Travail : 1° Le récépissé du dépôt à la Caisse des dépôts et consignations du capital de garantie de 100.000 francs ; 2° Son acte constitutif ; 3° Le texte de ses statuts ; 4° Le texte intégral du traité de gestion intervenu entre elle et la société gérée.

Le traité de gestion doit contenir certaines indications obligatoires : l'objet, le titre, le siège social de la société gérée et de la société gérante, la date d'origine de la gestion et la durée de la première période initiale qui ne peut dépasser 20 ans, les pouvoirs de la gérante et les conditions dans lesquelles la société gérée exercera son contrôle sur les opérations de la gérante, les conditions dans lesquelles la société gérante cessera sa gestion, soit à l'expiration du traité de gestion, soit en cas de cessation anticipée de la gestion, pour retrait d'enregistrement de l'entreprise gérée ou pour toute autre cause.

Le décret a prévu, dans son article 4, les conditions dans lesquelles les entreprises de gestion peuvent prélever la rémunération de leur gestion. Celles-ci ne peuvent prélever des sommes supérieures aux frais de gestion fixés dans les statuts et les tarifs de l'entreprise gérée sous déduction de la portion qui serait nécessaire à la constitution de la réserve de garantie. Ces conditions doivent du reste figurer dans le traité de gestion.

L'article 4, le plus important du décret, semble insuffisant. Il ne suffisait pas, en effet, qu'il fixât le maximum des sommes à prélever pour frais de gestion, il devait fixer également l'époque des prélèvements et distinguer entre les divers prélèvements. La société de gestion doit faire face aux frais d'encaissement des primes, aux frais d'acquisition des contrats et aux frais de gestion proprements dits. Les frais d'encaissement et les frais de gestion sont payables annuellement ou en même temps que les primes (payables d'avance) ; la société de gestion reçoit donc ces frais en même temps qu'elle perçoit les primes pour le compte de la société gérée. Il n'y a donc pas lieu d'établir un compte-courant entre la société de gestion et la société gérée pour les frais de gestion et les frais d'encaissement.

Ce compte-courant n'a de raison d'être que pour les frais d'acquisition que la société de gestion doit escompter, c'est-à-dire payer d'avance, et dont elle ne pourra se rembourser qu'au fur et à mesure du paiement des primes par le prélèvement sur chaque prime du chargement spécial d'acquisition. On conçoit qu'il ne peut lui être permis de prendre plus que le chargement d'acquisition, et qu'elle ne peut le prendre qu'au fur et à mesure du paiement des primes. Si les primes sont annuelles, la societé de gestion ne peut prélever le chargement d'acquisition qu'au moment du paiement de la prime annuelle. Elle peut donc se créditer dès la signature d'un contrat de capitalisation du montant total de la commission d'acquisition, et débiter la société gérée d'une somme égale. A la fin de chaque exercice la société gérée, ayant payé une partie de sa dette sur chacun des contrats souscrits antérieurement, voit diminuer sa dette pour ces contrats. Il faut donc arrêter le compte-courant spécial aux frais d'acquisition en fin d'année. Mais il peut y avoir des contrats résiliés ou déchus dans l'exercice ; pour ces contrats, la société de gestion ne pourra plus prélever les commissions d'acquisition non encore amorties, elle devra donc prendre sur les réserves des contrats que la société gérée lui rendra en partie. Dans le cas où la réserve d'un contrat serait insuffisante pour couvrir les frais d'acquisition relatifs aux contrats non encore amortis, la perte devrait être supportée par la société de gestion ; ce point est indiscutable. Celle-ci ne doit pas, en effet, payer trop vite les commissions dans le cas des contrats à primes fractionnées, et elle ne doit pas payer des commissions trop élevées, supérieures à la première réserve annuelle des contrats, par exemple. Les bénéfices de résiliation provenant des réserves après déduction des frais d'acquisition non amortis, appartiennent sans conteste à la société mutuelle gérée.

Les sommes avancées par la société gérée à la société de gestion pour frais d'acquisition peuvent être portées à l'actif de la société gérée comme compte à amortir ou compte de commissions escomptées. Si la société gérée avance toutes les commissions, comme si elle n'avait pas d'organe de gestion, le compte sera établi en tenant compte d'un amortissement analogue à l'amortissement viager basé sur la loi d'amortissement des titres. Le compte-courant entre la société de gestion et la société gérée n'existerait plus dans ce cas.

Le compte des commissions escomptées d'une mutuelle gérée s'établit donc de la même façon que si la société se gérait elle-même. On ne doit escompter que le chargement d'acquisition contenu dans les primes, et on ne doit amortir qu'au fur et à mesure de l'encaissement de celles-ci. Le décret aurait donc dû poser ce principe et demander aux sociétés de fixer un chargement spécial d'acquisition. Sans poser ce principe, il devient impossible d'établir le compte des

commissions escomptées, et cependant on ne peut permettre aux entreprises d'escompter le montant total du chargement des primes. De même, il ne peut être permis de prendre sur les bénéfices annuels pour amortir les commissions, les bénéfices étant la propriété des mutualistes.

Dans le cas où la société de gestion fait seule l'avance des commissions, la société gérée n'a pas de compte de commissions escomptées, mais elle a un compte-courant avec la société de gestion qui fonctionne comme un compte de commissions escomptées, qui est constamment débiteur, et donc le solde débiteur s'amortit au fur et à mesure de l'encaissement des primes par le prélèvement sur chacune d'elles du chargement d'acquisition.

La société de gestion doit alors ouvrir dans ses écritures un compte de commissions escomptées, qu'elle amortit au fur et à mesure du prélèvement du chargement d'acquisition. Ce compte est l'inverse du compte-courant avec la société gérée.

On peut se demander, dans le cas où une mutuelle est gérée, s'il n'appartiendrait pas à la société de gestion de faire l'avance des commissions d'acquisition, et s'il ne devrait pas être interdit à la mutuelle d'avancer à sa gérante les sommes dues pour l'acquisition des contrats. La mutuelle, qui n'a pas de capital social et qui ne peut disposer des bénéfices annuels de ses adhérents, ne peut faire d'avances à sa gérante qu'en prélevant sur les sommes affectées à la représentation des réserves mathémathiques, ce qui compromet sa situation financière et la prive d'une partie de ses bénéfices de placement. Il semble qu'une société de gestion qui profite des bénéfices de la gestion et prélève tous les chargements des primes devrait être tenue de rendre toutes les primes pures à la mutuelle gérée pour permettre à celle-ci de réaliser les bénéfices de placements auxquels elle a droit dans toute leur intégralité.

L'article 5 du décret interdit à l'entreprise gérée de déléguer à l'entreprise de gestion les pouvoirs qui ont trait aux opérations de capitalisation, notamment à l'établissement des contrats, à la détermination et à l'exécution des engagements en résultant, au placement des fonds destinés à assurer la garantie des engagements sociaux.

Cette disposition, excellente en soi, puisqu'elle distingue nettement la mutuelle de son agent de gestion, ne peut empêcher le conseil d'administration de la mutuelle d'être en même temps le conseil d'administration de la société de gestion; il ne peut empêcher les deux sociétés d'avoir un directeur commun; les actionnaires et administrateurs de la société de gestion peuvent évidemment être associés de la mutuelle. Et il se trouve que les dirigeants de la société anonyme de gestion, qui sont en même temps les dirigeants de la mutuelle, rédigent les statuts, établissent les tarifs et les

contrats de la mutuelle, ce qui peut avoir pour conséquence d'éloigner la mutuelle de son but mutualiste pour permettre à la société de gestion de poursuivre son but commercial. Les bénéfices de gestion, en tout cas, n'appartiennent plus à la mutuelle qui doit se contenter du bénéfice de placement et du bénéfice de résiliation.

Dans le cas où une mutuelle gérée emploierait une méthode de tirage donnant lieu à une mortalité indéterminée de titres (méthode des titres émis), il faudrait évidemment que le chargement de risque spécialement affecté à couvrir les écarts de mortalité fut remis à la mutuelle en même temps que les primes. Ce chargement confondu d'ordinaire avec le chargement de gestion devrait donc être distingué de celui-ci. Le bénéfice de mortalité serait la propriété de la mutuelle; ce bénéfice devrait être déterminé annuellement.

Décret du 20 décembre 1912
relatif à l'amortissement des frais de premier établissement

Un décret du 20 décembre 1912 a prescrit aux sociétés d'amortir, chaque année, une somme au moins égale au quotient du montant des frais de premier établissement par le nombre d'années restant à courir jusqu'à l'expiration des quinze exercices partant de l'enregistrement.

Le décret antérieur du 1er avril 1908 n'imposait qu'un amortissement total des frais de premier établissement en quinze ans, sans préciser le mode d'amortissement. Le nouveau décret obligera donc les sociétés à amortir un peu plus rapidement le compte des frais de premier établissement.

Une circulaire du Ministre du Travail aux sociétés a, d'autre part, défini les frais de premier établissement. Ce sont ceux qui sont faits avant la constitution de la société; ils comprennent les dépenses d'organisation, d'installation, de constitution, de mise en marche de la société. Les dépenses faites à partir du fonctionnement de la société doivent donc être considérés comme des frais généraux et figurer, chaque année, au compte de profits et pertes, ce qui oblige les sociétés à les amortir.

Un arrêté du 20 décembre a, en outre, supprimé le compte « frais généraux non amortis », et les sociétés se trouvent obligées de porter intégralement tous les frais généraux au compte de profits et pertes.

Les nouvellles interprétations du Ministre du Travail, les nouveaux décrets et arrêtés ont donc pour but de faire disparaître rapidement de l'actif des bilans des sociétés le compte des frais de premier établissement. La situation des sociétés apparaîtra plus rigoureusement exacte, chaque année, et aucune ne sera tentée de distribuer des dividendes à ses actionnaires ou des bénéfices à ses membres associés, tant que le bilan accusera un solde débiteur.

CONCLUSIONS DE L'ÉTUDE JURIDIQUE

La législation des sociétés de capitalisation qui date de cinq années a rendu d'incontestables services dans la protection de l'épargne publique et populaire. En réglementant le contrat de capitalisation, en obligeant les sociétés à se conformer aux différentes dispositions de la loi que nous avons étudiées dans les garanties, elle a donné à l'épargne une sécurité nouvelle. Il serait à désirer cependant que cette législation bienfaisante fût complétée sur certains points. Une réglementation de l'amortissement des commissions escomptées serait à désirer. Il serait souhaitable également que les traités de gestion, quand les sociétés sont gérées, fussent réglementés et que le principe que nous avons posé dans l'étude de l'article 4 du décret du 1er avril 1908 fût imposé par la loi, bien qu'il le soit, semble-t-il, par la théorie actuarielle du fonctionnement des sociétés mutuelles de capitalisation.

Enfin, si la loi de 1905 a, par un décret spécial, réglé les formalités de constitution des sociétés mutuelles d'assurances sur la vie, la loi de 1907 a oublié de légiférer sur ce point en ce qui concerne les sociétés mutuelles de capitalisation qui peuvent, dès lors, se former librement et s'administrer comme elles l'entendent. Il serait également nécessaire, semble-t-il, qu'un régime spécial fût institué pour les sociétés mutuelles de capitalisation.

ANNEXES NUMÉRIQUES

Contrat de 15 ans. Valeur 1.000 francs

Primes payables pendant 15 ans

Amortissement constant de 2 °/₀₀ par an des titres en cours

	1er amortissement après le paiement de la 1re prime	1er amortissement 6 mois après le paiement de la 1re prime	1er amortissement 1 an après le paiement de la 1re prime
Primes pures uniques....	602 90	602 49	602 09
Primes pures annuelles...	51 24	51 20	51 17
Primes pures mensuelles...	4 36	4 35	4 35

Contrat de 15 ans. Remboursable à 1.000 francs

Primes payables pendant 15 ans

Amortissement constant de 4 °/₀₀ par an des titres en cours

	1er amortissement après le paiement de la 1re prime	1er amortissement 6 mois après le paiement de la 1re prime	1er amortissement 1 an après le paiement de la 1re prime
Primes pures uniques....	608 43	607 64	606 86
Primes pures annuelles...	52 33	52 27	52 20
Primes pures mensuelles..	4 45	4 44	4 44

La prime annuelle fractionnée par mois est égale à la prime annuelle majorée de 2 °/₀.

Réserves annuelles successives d'un contrat de 15 ans remboursable à 1.000 francs

Amortissement garanti : 2 °/₀₀ par an	*sans amortissement garanti*
51 05	51 82
103 96	105 46
158 85	160 98
215 79	218 43
274 83	277 90
336 05	339 46
399 53	403 16
465 38	469 10
533 69	537 34
604 49	607 98
677 95	681 08
754 12	756 74
833 12	835 06
915 05	916 11

Contrat de 15 ans amortissable à 1.000 francs

Sans amortissement garanti

PRIME PURE UNIQUE	PRIME ANNUELLE PURE	PRIME MENSUELLE PURE
596 89	50 06	4 24

APRÈS	Valeurs de réduction	Valeurs de rachat	Versements effectués
3 ans	200 »	124 92	180 »
4 —	266 66	173 22	240 »
5 —	333 33	225 19	300 »
6 —	400 »	281 03	360 »
7 —	466 66	340 99	420 »
8 —	533 33	405 29	480 »
9 —	600 »	474 19	540 »
10 —	666 66	547 95	600 »
11 —	733 33	626 85	660 »
12 —	800 »	711 20	720 »
13 —	866 66	801 28	780 »
14 —	933 33	897 43	840 »
15 —	1000 »	1000 »	900 »

Contrats de 15 ans, remboursables à 1.000 francs

Amortissement annuel : 2/1000.

ANNÉES	RÉSERVES	FRAIS D'ACQUISITION non amortis	VALEUR DE RACHAT théorique	VALEUR DE RACHAT calculée par l'escompte à 4 % de la valeur de réduction proportionnelle
1	51 05	28 47	»	»
2	103 96	26 88	»	»
3	158 85	25 23	133 62	124 92
4	215 79	23 52	192 27	173 22
5	274 83	21 75	253 08	225 19
6	336 05	19 91	316 04	281 03
7	399 53	18 01	381 52	340 99
8	465 38	16 03	449 35	405 29
9	533 69	13 98	519 71	474 19
10	604 49	11 85	592 64	547 95
11	677 95	9 65	668 30	626 85
12	754 12	7 36	746 76	711 20
13	833 12	4 99	828 13	801 28
14	915 04	2 53	912 51	897 43
15	1.000 »	0	1.000 »	1.000 »

Les commissions d'acquisition sont supposées de 30 francs. Les valeurs de rachat généralement accordées sont plus faibles que la valeur de rachat théorique, obtenue en retranchant des réserves successives les frais d'acquisition non amortis.

Chargement des Primes

Cas d'un contrat de 15 ans amortissable à 1.000 francs. Prime mensuelle de 5 francs. Amortissement constant de **2/1000** *en milieu d'année.*

Commission d'acquisition : 30 francs, soit 1/2 prime annuelle.
Frais d'encaissement : 5 °/₀ des primes.
Chargement annuel de gestion : 2 fr. 15.
Prime annuelle pure : 51 fr. 20.
Chargement de fractionnement : 2 °/₀.
Amortissement annuel des commissions d'acquisition : 2 fr. 55.

$$\text{Prime annuelle brute} = \frac{51,20 + 2,15 + 2,55}{0,95} = 58 \text{ fr. } 85$$

$$\text{Prime unique brute} = \frac{602,50 + 30 + 25,30}{0,95} = 692 \text{ fr. } 40$$

On remarquera que le chargement annuel pour gestion est de 2 fr. 15. Dans le cas où l'on emploie la méthode de tirage sur les titres émis, nous avons vu que si l'on suppose 33 °/₀ des titres résiliés dans les diverses tranches de 500 titres, il faut constituer annuellement une prime de risque de 1 franc. Il peut donc, en cas d'écart défavorable, ne rester que 1 fr. 15 pour la gestion proprement dite.

Exemple d'un tirage dans une série de 325 titres

Taux constant de l'amortissement **2/1000** *par an.*

La série ayant moins de 500 titres, il y aura discontinuité dans les tirages, mais cependant, l'amortissement final se réalisera.

ANNÉES	NOMBRE de titres en cours	AMORTISSEMENT	REPORT DES RESTES	TIRAGES effectués
1	325	0 65	0 65	»
2	325	0 65	1 30	1
3	324	0 648	0 948	»
4	324	0 648	1 596	1
5	323	0 646	1 242	1
6	322	0 644	0 886	»
7	322	0 644	1 530	1
8	321	0 642	1 172	1
9	320	0 640	0 812	»
10	320	0 640	1 452	1
11	319	0 638	1 090	1
12	318	0 636	0 726	»
13	318	0 636	1 362	1
14	317	0 634	0 996	»
15	317	0 634	1 630	1
»	316	»	0 63	»

Il y a 9 titres entiers tirés ; il reste 316 titres en cours après le tirage du milieu de la 15[e] année.

Théoriquement, le nombre des titres restant en cours après 25 tirages est

$$325 \times 0,970417 = 315,39$$

A cause du reste 0,63 à reporter, on peut dire qu'il a été amorti théoriquement 315,37.

Exemple de tirage dans une série de 325 titres

Loi de Moivre à taux de **1/500** *la 1re année*

ANNÉES	NOMBRE de titres en cours	AMORTISSEMENT	REPORT DES RESTES	TIRAGES effectués
1	325	0,65	0,65	»
2	325	0,65	1,30	1
3	324	0,65	0,95	»
4	324	0,65	1,60	1
5	323	0,65	1,25	1
6	322	0,65	0,90	»
7	322	0,65	1,55	1
8	321	0,65	1,20	1
9	320	0,65	0,85	»
10	320	0,65	1,50	1
11	319	0,65	1,15	1
12	318	0,65	0,90	»
13	318	0,65	1,55	1
14	317	0,65	1,20	1
15	316	0,65	0,85	»
»	316	»	(0,85)	»

On remarquera que l'amortissement donné par la loi de Moivre est le même que l'amortissement de 2/1000 par an. On amortit 9 titres en 15 ans, il reste 316 titres en cours.

Exemple de tirage dans une série de 8.440 titres

Amortissement de **2/1000** *par an*

ANNÉES	NOMBRE de titres en cours	AMORTISSEMENT	REPORT DES RESTES	TIRAGES effectués
1	8440	16,88	0,88	16
2	8424	16,848	17,728	17
3	8407	16,814	17,542	17
4	8390	16,780	17,322	17
5	8373	16,746	17,068	17
6	8356	16,712	16,780	16
7	8340	16,680	17,460	17
8	8323	16,646	17,106	17
9	8306	16,612	16,718	16
10	8290	16,580	17,298	17
11	8273	16,546	16,844	16
12	8257	16,514	17,358	17
13	8240	16,480	16,838	16
14	8224	16,468	17,306	17
15	8207	16,434	16,740	16
»	8191	»	0,74	»

Le nombre de titres amortis est de 249 en 15 ans. On voit également que l'on ne peut amortir par excès ou par défaut à 1/2 unité près, car il n'y aurait pas compensation des écarts.

Exemple de tirage dans une série de 8.440 titres

Loi de Moivre au taux de 1/500 *la première année*

ANNÉES	NOMBRE de titres en cours	AMORTISSEMENT	REPORT DES RESTES	TIRAGES effectués
1	8440	16 88	0 88	16 titres
2	8424	16 88	17 76	17 —
3	8407	16 88	17 64	17 —
4	8390	16 88	17 52	17 —
5	8373	16 88	17 40	17 —
6	8356	16 88	17 28	17 —
7	8339	16 88	17 16	17 —
8	8322	16 88	17 04	17 —
9	8305	16 88	16 92	16 —
10	8289	16 88	17 80	17 —
11	8272	16 88	17 68	17 —
12	8255	16 88	17 56	17 —
13	8238	16 88	17 44	17 —
14	8221	16 88	17 32	17 —
15	8204	16 88	17 20	17 —
»	8187	16 88	(0 20)	»

On voit que l'on peut tirer presque constamment 17 titres. Le nombre de titres amortis est de 253 en 15 ans; la loi de l'exponentielle amortit 4 titres en moins. Si l'on amortissait tantôt par excès, tantôt par défaut à demi-unité près, il n'y aurait pas compensation des écarts.

Contrat de 1.000 francs, durée 15 ans

Primes mensuelles, amortissements mensuels

Taux d'amortissement annuel 2 °/₀₀

Calcul de Π par la formule

$$\Pi = \frac{q}{12}(1+i)^{-\frac{1}{24}} \frac{\left(1-\frac{q}{12}\right)^{12n}(1+i)^{-n}-1}{\left(1-\frac{q}{12}\right)(1+i)^{-\frac{1}{12}}-1} + \left(1-\frac{q}{12}\right)^{12n}(1+i)^{-n}$$

et ϖ par la formule

$$\varpi = q(1+j)^{-\frac{1}{2}} + \frac{p^{12n}(1+j)^{-12n}}{1+a_0^{(12n-1)}}$$

$$1 + a_0^{(12n-1)} = \frac{p^{12n}(1+j)^{-12n}-1}{p(1+j)^{-1}-1}$$

Dans les formules

$$1 + j = 1{,}00287 \qquad (1+j)^{-12n} = (1+i)^{-n} = (1{,}035)^{-15}$$

$$\left(1 - \frac{q}{12}\right)^{12\times 5} = 0{,}970484$$

on trouve
$$\Pi = 602 \text{ fr. } 20$$

$$1 + a_0^{(12n-1)} = 138{,}945$$

$$\varpi_m = 4{,}334$$

Si l'on calcule l'annuité fractionnée par la formule

$$a_0^{(n)} + \frac{13}{24}(1 - \mathrm{P}_0^n), \text{ on trouve } 11{,}5737$$

ou $1 + a_0^{(n-1)} = 11{,}5787$ un peu plus élevée que la précédente

On remarquera que la prime ϖ_m est sensiblement la même que la prime mensuelle ϖ_m, calculée précédemment en majorant la prime annuelle de 2 °/₀ (majoration un peu plus élevée que la valeur théorique de la majoration).

Comparaison des quantités

$$\frac{q}{12}(1+i)^{-\frac{1}{24}}\left[1 + (1+i)^{-\frac{1}{12}} + (1+i)^{-\frac{2}{12}} + \ldots + (1+i)^{-\frac{11}{12}}\right]$$

et $q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}}$

ou en général de

$$\frac{q}{k}(1+i)^{-\frac{1}{2k}}\left[1 + (1+i)^{-\frac{1}{k}} + (1+i)^{-\frac{2}{k}} + \ldots + (1+i)^{-\frac{k-1}{k}}\right]$$

et $q\,(1+i)^{-\frac{1}{2}}$

En négligeant q, on peut montrer qu'il s'agit de comparer les quantités

$$\frac{(1+i)^{\frac{1}{2}}}{i} \quad \text{et} \quad \frac{(1+i)^{\frac{1}{2k}}}{k\left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1\right]}$$

La première représente une rente perpétuelle de terme 1 au taux i anticipée d'une demi-année.

La deuxième représente une rente perpétuelle de terme $\frac{1}{k}$ au taux équivalent au taux i, payable en milieu de chacune des k périodes qui divisent l'année, anticipée de $\frac{1}{2k}$ ou d'une demi-période.

Ces deux rentes perpétuelles diffèrent donc très peu.

Dans le cas d'un amortissement de $\frac{2}{1000}$ des titres et le cas de $k = 12$, on trouve que la première quantité ci-dessus vaut $\frac{2}{1000} \times$ 0,983245.

Elle diffère de $q\ (1 + i)^{-\frac{1}{2}}$ ou de $\frac{2}{1000} \times 0,982946$ de $\frac{3}{10000} \times \frac{2}{1000}$.

On conclut de ce résultat que lorsqu'on évalue les primes d'un contrat à amortissements mensuels, on peut remplacer les douze tirages par un seul en milieu d'année. Le calcul effectué ainsi donne des primes qui ne diffèrent pas des primes calculées par la méthode exacte. Le chiffre des centimes ne serait pas altéré, sauf dans le cas des durées très longues.

Capitalisation à terme fixe

Cas d'un contrat de 1.000 francs payable en 15 ans

Amortissement annuel 2 °/₀₀ par an

Les contractants, dont les titres sortent aux tirages, cessent de payer les primes et ils touchent cependant le capital au bout de 15 ans.

La prime unique du contrat serait 596,89.

la prime annuelle $\frac{596,89}{11,766} = 50,73$.

Si l'on compare la prime annuelle à la prime annuelle de capitalisation certaine 50,06, on voit que la chance de ne plus payer les primes pendant les 15 ans vaut environ 0 fr. 67.

La prime annuelle de la mixte-capitalisation vaut 51 fr. 20, supérieure de 0 fr. 47 à la prime annelle de la terme-fixe capitalisation.

Contrat de 20 ans à primes payables pendant 15 ans

Primes mensuelles de 5 francs

Amortissement mensuel de 1 *titre sur* 2.000. *Loi de mortalité de Moivre*

Calcul de la prime unique Π par la formule :

$$\Pi = \frac{12\,(1+i)^{\frac{1}{2}}}{N} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{N-12\,n}{N}(1+i)^{-n}$$

où
$$1+i = 1{,}035$$
$$n = 20$$
$$N = 2.000$$

On trouve Π = 555 fr. 457.

Si l'on suppose maintenant que 20 °/₀ des titres sont résiliés ou placés, c'est-à-dire qu'il n'y a en moyenne que 800 titres au lieu de 1.000 dans les différentes tranches, on trouve :

$$\Pi' = 568 \text{ fr. } 677.$$

La prime se trouve augmentée de 13 fr. 22. La prime de risque unique est donc de 13 fr. 22, si l'on suppose que les résiliations sont en moyenne de 20 °/₀ des titres en cours dans la Société.

L'annuité, dans le cas de 1.000 titres en vigueur, est donnée par la formule :

$$a_0^{(12n)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{12}}-1} - \frac{(1-i)^{\frac{1}{12}}}{N\left[(1+i)^{\frac{1}{12}}-1\right]} \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{12}}-1} - 12n\,(1+i)^{-n}(1+i)^{-\frac{1}{12}}\right]$$

$$a_0^{(12n-1)} = a_0^{(12n)} - \frac{N-12n}{N}(1+i)^{-n} \qquad n = 15 \quad N = 1.000$$

On trouve :

$$a_0^{(12n)} = 128 \text{ fr. } 8120$$
$$a_0^{(12n-1)} = 128 \text{ fr. } 3583$$

Dans le cas où N = 800, les annuités $a_0^{(12n)}$, $a_0^{(12n-1)}$ sont :

$$a_0^{(12n)} = 125 \text{ fr. } 9009$$
$$a_0^{(12n-1)} = 125 \text{ fr. } 4831$$

La prime annuelle à payer, sans tenir compte du risque :

$$\frac{\Pi}{1 + a_0^{(12n-1)}} = 4 \text{ fr. } 2939$$

La prime mensuelle, majorée de la prime de risque, serait :

$$\frac{\Pi'}{1 + a_0^{(12n-1)}} = 4 \text{ fr. } 4960$$

Il faudrait donc majorer les primes mensuelles de 0 fr. 20 pour tenir compte de l'écart de la mortalité.

Si on calcule la réserve après 15 ans (réserve normale augmentée de la réserve de risque), on obtient le calcul suivant :

$$733{,}122 - 52{,}885 \times 4{,}496 = 495 \text{ fr. } 351$$

La réserve normale ordinaire serait de

$$727{,}6162 - 55{,}8668 \times 4{,}2939 = 491 \text{ fr. } 164$$

La réserve de risque après 10 ans est donc de 4 fr. 187.

La réserve ordinaire après 15 ans serait $\Pi_{15} = 847$ fr. 582.

La réserve augmentée de la prime de risque serait $\Pi'_{15} = 849$ fr. 393.

La réserve de risque après 15 ans serait 1 fr. 811.

TABLE DES MATIÈRES DE LA THÈSE

Pages

PRÉFACE 148

ÉTUDE ACTUARIELLE

PREMIÈRE PARTIE

Opérations de capitalisation dans lesquelles les remboursements de contrats sont effectués sur les bénéfices 152

DEUXIÈME PARTIE

Opérations de capitalisation comportant des remboursements par tirages au sort garantis

CHAPITRE I. — Opérations de capitalisation comportant un tirage annuel. (Méthode de tirage sur les titres en cours). 159

CHAPITRE II. — Opérations de capitalisation à tirages mensuels avec paiement de primes mensuelles. (Méthode de tirage sur les titres en cours). 187

CHAPITRE III. — Opérations de capitalisation à tirages trimestriels avec paiement de primes trimestrielles. (Méthode de tirage sur les titres en cours). 194

CHAPITRE IV. — Opérations de capitalisation comportant plusieurs tirages par mois. (Méthode de tirage sur les titres en cours).. 198

CHAPITRE V. — Méthode de tirage sur les titres émis. 200

CHAPITRE VI. — Titres dont les primes portent intérêt ou titres obligations. Titres à remboursement croissant en progression arithmétique 209

CONCLUSIONS de l'étude actuarielle 212

ÉTUDE JURIDIQUE

Législation (Loi du 19 décembre 1907) 214

CONCLUSIONS de l'étude juridique 230

ANNEXES NUMÉRIQUES 231